



## B3 4-1 因式分解一元二次方程式



概念

### ① 一元二次方程式的意義



$$\begin{array}{c} \boxed{\phantom{000}} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 2\boxed{x^2} + 3\boxed{x} + 1 = 0 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \boxed{\phantom{00}} \quad \boxed{\phantom{00}} \end{array}$$

☆筆記

一元二次方程式就是化簡後可寫成\_\_\_\_\_

(其中\_\_\_\_\_)的形式。



### 牛刀小試 1

1. 判斷下列各式是不是一元二次方程式，「是」的請畫○，「不是」的請畫×

☐ (1)  $3x + 5 = 0$

☐ 一元(未知數)

☐ 二次(最高次方)

☐ 方程式(=)

☐ (2)  $2x^2 + x = 7$

☐ 一元

☐ 二次

☐ 方程式

☐ (3)  $x^2 - 1 = 0$

☐ (4)  $5x^2 - 4x - 3 = 0$

☐ (5)  $3x^2 - 4x + 5$

2. 判斷下列各式是不是一元二次方程式，「是」的請畫○，「不是」的請畫×

☐ (1)  $3x - 2 = 0$

☐ (2)  $x^2 - 5x = 0$

☐ (3)  $3x^2 + 1 = 0$

☐ (4)  $5x^2 - 6x - 7 = 0$

☐ (5)  $3x^2 - 5x + 1$

**例題****① 判別一元二次方程式**

判斷下列各式是不是一元二次方程式，「是」的請畫○，「不是」的請畫×，並請說明理由

☆筆記

☐ (1)  $2x+3=5$  理由：\_\_\_\_\_

☐ (2)  $x^2+3x-5$  理由：\_\_\_\_\_

☐ (3)  $x^2=5$  理由：\_\_\_\_\_

☐ (4)  $(x-5)(2x+3)=0$  理由：\_\_\_\_\_

☐ (5)  $x^2+2x+3=(x-1)(x+2)$  理由：\_\_\_\_\_

**牛刀小試 2**

1. 判斷下列各式是哪種式子，填入格子內。

(A)一元一次式 (B)一元一次方程式

(C)二元一次式 (D)二元一次方程式

(E)一元二次式 (F)一元二次方程式

(1)  $3x-4$  是 \_\_\_\_\_。

(2)  $3x^2+4x+5$  是 \_\_\_\_\_。

(3)  $x-6y=5$  是 \_\_\_\_\_。

(4)  $3x-7=8$  是 \_\_\_\_\_。

(5)  $3x^2+3=x+2$  是 \_\_\_\_\_。

2. 試判斷下列各式是否為一元二次方程式，是的畫○，不是的畫×。

☐ (1)  $5x-2x^2=9$

☐ (2)  $(4x+1)(x-6)=5$

☐ (3)  $(2x-4)(x+1)=2x^2-5x+9$

☐ (4)  $3x^2=x$

☐ (5)  $3x^2+3x+2=(x+2)(2x+1)$



(1)  $x=2$ ，計算  $x^2$  和  $-x^2$  的值

☆筆記

(2)  $x=-3$ ，計算  $3x^2$  和  $-2x^2$  的值

☆ $3 \times 2^2$  怎麼算？

1. 先算  $2^2=2 \times 2$  (自乘 2 遍)

2. 再乘數字 3

$$\begin{aligned} 3 \times 2^2 &= 3 \times (2 \times 2) \\ &= 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$



牛刀小試 ③

1.  $x=3$ ，計算下列各值

(1)  $x^2$  的值

(2)  $-x^2$  的值

2.  $x=-2$ ，計算

(1)  $3x^2$  的值

(2)  $-2x^2$  的值

3.  $x=4$ ，計算下列各值

(1)  $x^2$  的值

(2)  $-x^2$  的值

4.  $x=-5$ ，計算

(1)  $3x^2$  的值

(2)  $-2x^2$  的值



概念

②

## 一元二次方程式的「解」或「根」



2 是否為一元二次方程式  $x^2 - 3x + 2 = 0$  的解？

☆筆記

1. 將  $x$  用某數字 1、2... 代入方程式中
2. 「解」或「根」：  
計算後的數值可使\_\_\_\_\_，  
則某數字就稱方程式的「解或根」



牛刀小試 4

1. (1) 1 是不是方程式  $x^2 + 3x - 10 = 0$  的解？

2. (1) 5 是否為方程式  $x^2 - 3x - 10 = 0$  的解？

(2) 3 是不是方程式  $2x^2 - 3x - 9 = 0$  的解？

(2) -2 是否為方程式  $4x^2 + 9x - 2 = 0$  的解？



## 例題 ② 判別是不是解



(1) -1 是不是方程式  $5x^2 + 3x - 2 = 0$  的解？

☆筆記

(2) -2 是不是方程式  $(x-3)(x+2)=0$  的解？



## 牛刀小試 5

1. (1) -7 是否為方程式  $(x+7)(3x+5)=0$  的解？

(2) 2 是否為方程式  $(5x-2)(3x+5)=12$  的解？

(3) 想想看，符合  $(\square + 2) \times (\square - 5) = 0$  則  $\square$  可以填那些數？

$\square$  內的數就是方程式的解

2. (1) 下列各數中，哪些是一元二次方程式  $x^2 - x = 6$  的解？

- (A)  $x=3$       (B)  $x=1$   
(C)  $x=2$       (D)  $x=-2$

答：\_\_\_\_\_。

(2) 下列各數中，哪些是一元二次方程式  $2x^2 - 2x = 12$  的解？

- (A)  $x=3$       (B)  $x=1$   
(C)  $x=2$       (D)  $x=-2$

答：\_\_\_\_\_。

(3) 由(1)(2)中，請問一元二次方程式  $x^2 - x = 6$  和  $2x^2 - 2x = 12$  的解是否相同？答：\_\_\_\_\_。



## 溫故知新 ② 解一元一次方程式



(1)  $x - 3 = 0$

(2)  $2x + 6 = 0$

☆筆記

(3)  $3x - 4 = 0$

(4)  $-x + 5 = 0$



### 牛刀小試 6

#### 1. 解一元一次方程式

(1)  $x - 3 = 0$

(2)  $x + 4 = 0$

(3)  $2x + 6 = 0$

(4)  $3x - 4 = 0$

(5)  $-x + 5 = 0$

(6)  $-x - 4 = 0$



概念

③  $A \times B = 0$ ，則  $A = 0$  或  $B = 0$



$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

☆筆記

$A \times B = 0$ ，則\_\_\_\_\_。



牛刀小試 7

1. 解一元二次方程式

(1)  $(x - 3)(x + 7) = 0$

(2)  $(x - 2)(x + 11) = 0$

(3)  $(x - 9)(x - 12) = 0$

2. 解一元二次方程式

(1)  $(x - 4)(x + 5) = 0$

(2)  $(x - 5)(x + 1) = 0$

(3)  $(x - 8)(x - 4) = 0$

**例題****③** $A \times B = 0$ ，則  $A = 0$  或  $B = 0$ 

(1)  $x(3x-1)=0$

(2)  $(2x-1)(2x+3)=0$

☆筆記

**牛刀小試 8**

1. 解一元二次方程式

(1)  $x(x+2)=0$

(2)  $x(2x+3)=0$

(3)  $3x(4x-1)=0$

(4)  $(2x-4)(7x+14)=0$

(5)  $(8x-4)(10x+5)=0$

(6)  $(3x-1)(3x+4)=0$





(1)  $x^2 + x$

(2)  $3x^2 - 5x$

☆筆記

(3)  $x + 5x - 1 + (x - 2)(x - 1)$

(4)  $(x - 2)^2 + 3(x - 2)$



## 牛刀小試 9

## 1. 利用提公因式作因式分解

(1)  $x^2 - x$

(4)  $(x + 6)(x - 3) + (x - 3)(x + 7)$

(2)  $5x^2 + 4x$

(5)  $(x - 5)^2 + 2(x - 5)$

(3)  $(x + 3)(x + 5) + (x - 2)(x + 5)$

(6)  $(2x - 3)^2 + 4(2x - 3)$



概念

## ④ 利用提公因式解一元二次方程式



$$x^2 - 3x = 0$$

☆筆記

將二次方程分

解成( ) ( ) = 0

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ ( ) = 0 \text{ 或 } ( ) = 0 \end{array}$$


## 牛刀小試 10

1. 利用提公因式解一元二次方程式

(1)  $x^2 + x = 0$

(2)  $x^2 - x = 0$

(3)  $x^2 + 4x = 0$

(4)  $x^2 - 5x = 0$

2. 利用提公因式解一元二次方程式

(1)  $x^2 + 8x = 0$

(2)  $x^2 - 7x = 0$

(3)  $x^2 + 9x = 0$

(4)  $x^2 - 6x = 0$



## 例題 4 利用提公因式解一元二次方程 ( 單項 )



(1)  $3x^2 + 4x = 0$

(2)  $x^2 - x = 0$

(3)  $-x^2 + 6x = 0$

☆筆記



### 牛刀小試 11

1. 解一元二次方程式

(1)  $3x^2 - 2x = 0$

(2)  $4x^2 + 7x = 0$

(3)  $9x^2 + 3x = 0$

(4)  $8x^2 - 4x = 0$

(5)  $-x^2 + 4x = 0$

(6)  $-3x^2 + 8x = 0$

**例題****5****利用提公因式解一元二次方程式 (多項)**

(1)  $(x+3)(2x+7)=(x+3)(x+1)$

(2)  $(x-2)^2=3(x-2)$

☆筆記

**牛刀小試 12****1. 解一元二次方程式**

(1)  $(2x+5)(x-2)=(x+2)(x-2)$

(2)  $(3x+7)(x-4)=(x+2)(x-4)$

(3)  $(2x+5)(x+1)=(x-7)(x+1)$

**2. 解一元二次方程式**

(1)  $(x-3)^2=5(x-3)$

(2)  $(3x+2)^2=4(3x+2)$

(3)  $(2x-3)^2+4(2x-3)=0$



(1)  $x^2 + 8x + 7$

(2)  $x^2 - 6x + 5$

☆筆記

(3)  $2x^2 + 9x - 5$

(4)  $3x^2 - 2x - 5$



牛刀小試 13

1. 運用十字交乘法作因式分解

(1)  $x^2 + 8x + 7$

(4)  $x^2 - 2x - 8$

(2)  $x^2 - 6x + 5$

(5)  $2x^2 - 3x - 5$

(3)  $x^2 + 8x - 9$

(6)  $3x^2 + 2x - 5$



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

☆筆記

因為沒有公因式，可利用十字交乘法分解成(    )(    )=0

再解一元一次方程式



## 牛刀小試 14

1. 利用十字交乘法解方程式

(1)  $x^2 - 7x + 10 = 0$

(2)  $x^2 + 7x + 12 = 0$

(3)  $x^2 - 11x + 18 = 0$

2. 利用十字交乘法解方程式

(1)  $x^2 - 4x - 21 = 0$

(2)  $x^2 + 2x - 15 = 0$

(3)  $x^2 - 5x - 24 = 0$

**例題****6****利用十字交乘法解一元二次方程式**

(1)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

(2)  $3x^2 - 16x + 5 = 0$

(3)  $3x^2 + 14x - 5 = 0$

☆筆記

**牛刀小試 15****1. 解一元二次方程式**

(1)  $3x^2 + 8x + 5 = 0$

(2)  $2x^2 + 11x + 15 = 0$

(3)  $2x^2 - 13x + 21 = 0$

(4)  $3x^2 - 10x + 8 = 0$

**2. 解一元二次方程式**

(1)  $2x^2 + 5x - 7 = 0$

(2)  $3x^2 + 7x - 20 = 0$

(3)  $2x^2 - x - 6 = 0$

(4)  $3x^2 - 5x - 2 = 0$



# 溫故知新 ⑤ 運用乘法公式作因式分解



(1)  $x^2 - 5^2$

(2)  $4x^2 - 9$

☆筆記

(3)  $x^2 + 4x + 2^2$

(4)  $4x^2 - 12x + 9$



## 牛刀小試 16

1. 利用乘法公式作因式分解

(1)  $x^2 - 4^2$

$= ( \quad + \quad ) ( \quad - \quad )$

(2)  $x^2 - 4$

(3)  $49x^2 - 25$

(4)  $x^2 + \underline{18x} + 9^2$

$= x^2 + 2 \cdot x \cdot ( \quad ) + 9^2 = ( \quad )^2$

(5)  $x^2 + 6x + 9$

(6)  $9x^2 - 24x + 16$





$$\blacksquare x^2 - 4 = 0$$

$$\blacksquare x^2 - 4x + 4 = 0$$

☆平－平兩相加乘兩相減

1.  $(\quad)^2 - (\quad)^2 = [+ (\quad)][- (\quad)]$

2. 有些二次方程式只看見一個根，因為是二次方程式，表示 2 個解是一樣的，為了強調有兩根，所以用「重根」。



## 牛刀小試 17

1. 利用乘法公式解一元二次方程式

(1)  $x^2 - 25 = 0$

$$(\quad)^2 - (\quad)^2 = 0$$

$$(\quad + \quad)(\quad - \quad) = 0$$

(2)  $x^2 - 9 = 0$

(3)  $x^2 - 16 = 0$

(4)  $x^2 - 81 = 0$

2. 利用乘法公式解一元二次方程式

(1)  $x^2 + 14x + 49 = 0$

(2)  $x^2 + 16x + 64 = 0$

(3)  $x^2 - 20x + 100 = 0$

(4)  $x^2 - 12x + 36 = 0$

**例題****7****利用乘法公式解一元二次方程式**

(1)  $4x^2 - 9 = 0$

(2)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

(3)  $16x^2 + 24x + 9 = 0$

☆筆記

**牛刀小試 18****1. 解一元二次方程式**

(1)  $64x^2 - 9 = 0$

(2)  $49x^2 - 16 = 0$

(3)  $25x^2 - 121 = 0$

(4)  $4x^2 - 25 = 0$

**2. 解一元二次方程式**

(1)  $9x^2 + 24x + 16 = 0$

(2)  $16x^2 + 56x + 49 = 0$




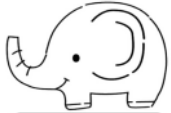
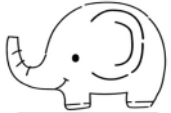
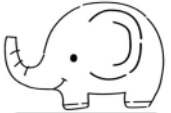
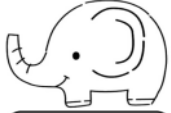
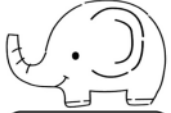
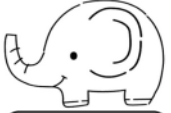



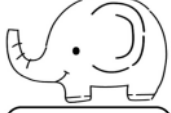
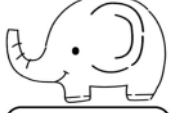

(3)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$

(4)  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

# 檢核區



1. 先解出方程式，將答案寫在象腿下的格子中，若答案一根是正整數請將大象著色。
2. 將著色後的大象連起來，形成一個數字，請寫下著色後的數字為\_\_\_\_\_。

|   |   |  |
|---|---|--|
| $(2x-4)(2x+5)=0$<br><br><br><input data-bbox="379 593 550 660" type="text"/>   | $x^2-4x=0$<br><br><br><input data-bbox="850 593 1021 660" type="text"/>         | $x(x-2)+3(x-2)=0$<br><br><br><input data-bbox="1321 593 1492 660" type="text"/>   |
| $x^2+5x-6=0$<br><br><br><input data-bbox="379 952 550 1019" type="text"/>      | $3x^2+11x+6=0$<br><br><br><input data-bbox="850 952 1021 1019" type="text"/>    | $2x^2+9x+7=0$<br><br><br><input data-bbox="1321 952 1492 1019" type="text"/>      |
| $x^2-7x-18=0$<br><br><br><input data-bbox="379 1310 550 1377" type="text"/>  | $3x^2-4x-4=0$<br><br><br><input data-bbox="850 1310 1021 1377" type="text"/>  | $(x-4)(2x-7)=0$<br><br><br><input data-bbox="1321 1310 1492 1377" type="text"/> |
| $x^2-7x=0$<br><br><br><input data-bbox="379 1668 550 1736" type="text"/>     | $9x^2+12x+4=0$<br><br><br><input data-bbox="850 1668 1021 1736" type="text"/> | $x^2-25=0$<br><br><br><input data-bbox="1321 1668 1492 1736" type="text"/>      |
| $5x^2-3x-14=0$<br><br><br><input data-bbox="379 2027 550 2094" type="text"/> | $x^2-12x+20=0$<br><br><br><input data-bbox="850 2027 1021 2094" type="text"/> | $x^2-6x+9=0$<br><br><br><input data-bbox="1321 2027 1492 2094" type="text"/>    |



牛刀小試 1

1. (1) ×  
(2) ○  
(3) ○  
(4) ○  
(5) ×
2. (1) ×  
(2) ○  
(3) ○  
(4) ○  
(5) ×

牛刀小試 2

1. (1) A  
(2) E  
(3) D  
(4) B  
(5) F
2. (1) ○  
(2) ○  
(3) ×  
(4) ○  
(5) ○

牛刀小試 3

1. (1) 9 (2) -9
2. (1) 12 (2) -8
3. (1) 16 (2) -16
4. (1) 75 (2) -50

牛刀小試 4

1. (1) 不是  
(2) 是
2. (1) 是  
(2) 不是

牛刀小試 5

1. (1) 是  
(2) 不是  
(3) -2, 5
2. (1) A、D  
(2) A、D  
(3) 是

牛刀小試 6

1. (1)  $x=3$   
(2)  $x=-4$   
(3)  $x=-3$   
(4)  $x=\frac{4}{3}$   
(5)  $x=5$

牛刀小試 16

$$(6) x = -4$$

牛刀小試 7

1. (1)  $x=3$  或  $x=-7$   
(2)  $x=2$  或  $x=-11$   
(3)  $x=9$  或  $x=12$
2. (1)  $x=4$  或  $x=-5$   
(2)  $x=5$  或  $x=-1$   
(3)  $x=8$  或  $x=4$

牛刀小試 8

- (1)  $x=0$  或  $-2$
- (2)  $x=0$  或  $-\frac{3}{2}$
- (3)  $x=0$  或  $\frac{1}{4}$
- (4)  $x=2$  或  $-2$
- (5)  $x=\frac{1}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$
- (6)  $x=\frac{1}{3}$  或  $-\frac{4}{3}$

牛刀小試 9

1. (1)  $x(x-1)$   
(2)  $x(5x+4)$   
(3)  $(2x+1)(x+5)$   
(4)  $(2x+13)(x-3)$   
(5)  $(x-3)(x-5)$   
(6)  $(2x+1)(2x-3)$

牛刀小試 10

1. (1)  $x=0$  或  $-1$   
(2)  $x=0$  或  $1$   
(3)  $x=0$  或  $-4$   
(4)  $x=0$  或  $5$
2. (1)  $x=0$  或  $-8$   
(2)  $x=0$  或  $7$   
(3)  $x=0$  或  $-9$   
(4)  $x=0$  或  $6$

牛刀小試 11

- (1)  $x=0$  或  $\frac{2}{3}$
- (2)  $x=0$  或  $-\frac{7}{4}$
- (3)  $x=0$  或  $-\frac{1}{3}$
- (4)  $x=0$  或  $\frac{1}{2}$
- (5)  $x=0$  或  $4$

$$(6) x=0 \text{ 或 } \frac{8}{3}$$

牛刀小試 12

1. (1)  $x=2$  或  $-3$   
(2)  $x=4$  或  $-\frac{5}{2}$   
(3)  $x=-1$  或  $-12$
2. (1)  $x=3$  或  $8$   
(2)  $x=-\frac{2}{3}$  或  $\frac{2}{3}$   
(3)  $x=\frac{3}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$

牛刀小試 13

1. (1)  $(x+1)(x+7)$   
(2)  $(x-1)(x-5)$   
(3)  $(x-1)(x+9)$   
(4)  $(x+2)(x-4)$   
(5)  $(x+1)(2x-5)$   
(6)  $(x-1)(3x+5)$

牛刀小試 14

1. (1)  $x=2$  或  $5$   
(2)  $x=-3$  或  $-4$   
(3)  $x=2$  或  $9$
2. (1)  $x=-3$  或  $7$   
(2)  $x=3$  或  $-5$   
(3)  $x=-3$  或  $8$

牛刀小試 15

1. (1)  $x=-1$  或  $-\frac{5}{3}$   
(2)  $x=-3$  或  $-\frac{5}{2}$   
(3)  $x=3$  或  $\frac{7}{2}$   
(4)  $x=2$  或  $\frac{4}{3}$
2. (1)  $x=1$  或  $-\frac{7}{2}$   
(2)  $x=-4$  或  $\frac{5}{3}$   
(3)  $x=-\frac{3}{2}$  或  $2$   
(4)  $x=2$  或  $-\frac{1}{3}$

1. (1)  $(x+4)(x-4)$   
 (2)  $(x+2)(x-2)$   
 (3)  $(7x-5)(7x+5)$   
 (4)  $(x+9)^2$   
 (5)  $(x+3)^2$   
 (6)  $(3x-4)^2$

牛刀小試 17

1. (1)  $x=\pm 5$   
 (2)  $x=\pm 3$   
 (3)  $x=\pm 4$   
 (4)  $x=\pm 9$
2. (1)  $x=-7$  (重根)  
 (2)  $x=-8$  (重根)  
 (3)  $x=10$  (重根)  
 (4)  $x=6$  (重根)

牛刀小試 18

1. (1)  $x=\pm \frac{3}{8}$   
 (2)  $x=\pm \frac{4}{7}$   
 (3)  $x=\pm \frac{11}{5}$   
 (4)  $x=\pm \frac{5}{2}$
2. (1)  $x=-\frac{4}{3}$  (重根)  
 (2)  $x=-\frac{7}{4}$  (重根)  
 (3)  $x=\frac{1}{2}$  (重根)  
 (4)  $x=\frac{2}{5}$  (重根)

檢核區

1.
 

|                        |                         |                         |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $x=2$ 或 $-\frac{5}{2}$ | $x=0$ 或 $4$             | $x=-3$ 或 $2$            |
| $x=-6$ 或 $1$           | $x=-3$ 或 $-\frac{2}{3}$ | $x=-1$ 或 $-\frac{7}{2}$ |
| $x=-2$ 或 $9$           | $x=-\frac{2}{3}$ 或 $2$  | $x=4$ 或 $\frac{7}{2}$   |
| $x=0$ 或 $7$            | $x=-\frac{2}{3}$ (重根)   | $x=\pm 5$               |
| $x=-\frac{7}{5}$ 或 $2$ | $x=2$ 或 $10$            | $x=3$ (重根)              |