



## B3 3-1 因式分解



概念

### ① 用除法判別因式和倍式



#### 一、因數與倍數

(1) 2 是不是 16 的因數？

(2) 5 是不是 16 的因數？

#### 二、因式和倍式

(1)  $(x+1)$  是不是  $(x^2+3x+2)$  的因式？

(2)  $(x+4)$  是不是  $(x^2+3x+2)$  的因式？

☆筆記



如果正整數  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都不是 0



如果多項式  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都不是 0



### 牛刀小試 1

1. (1) 15 是不是 24 的因數？

(2) 20 是不是 5 的倍數？

(3) 32 是不是 6 的倍數？

2. (1) 12 是不是 12 的因數？

(2) 12 是不是 12 的倍數？

(3) 1 是不是 13 的因數？

3. (1)  $(x+2)$  是不是  $(x^2+6x+8)$  的因式嗎？

(2)  $(x-3)$  是不是  $(x^2+6x+9)$  的因式嗎？

4. (1)  $(x^2+3x-10)$  是不是  $(x+5)$  的倍式嗎？

(2)  $(x^2+2x-24)$  是不是  $(x-6)$  的倍式嗎？



(1)  $6 \div 2$

(2)  $(x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$

☆筆記

$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

請圈出 $(x^2 + 3x + 2)$ 的因式

$(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 2)$

$1 \cdot (x + 1)(x + 2) \cdot 3$

$6 = 2 \times 3$  我們說

❶ 2 和 3 是 6 的\_\_\_\_\_

❷ 6 是 2 和 3 的\_\_\_\_\_

若多項式  $A$ 、 $B$ 、 $C$  都不為 0

$A = B \times C$

 $\Rightarrow$  ❶  $B$  和  $C$  是  $A$  的\_\_\_\_\_❷  $A$  是  $B$  和  $C$  的\_\_\_\_\_

## 牛刀小試 2

1.  $(x^2 + 3x + 2) = (x + 2)(x + 1)$

 $(x + 2)$  是  $(x^2 + 3x + 2)$  的\_\_\_\_\_式 $(x^2 + 3x + 2)$  是  $(x + 1)$  的\_\_\_\_\_式

2.  $(x^2 + 4x + 3) = (x + 1)(x + 3)$

 $(x + 1)$  是  $(x^2 + 4x + 3)$  的\_\_\_\_\_式 $(x^2 + 4x + 3)$  是  $(x + 3)$  的\_\_\_\_\_式

3.  $(x^2 + 6x + 8) = (x + 4)(x + 2)$

 $(x^2 + 6x + 8)$  是  $(x + 2)$  的\_\_\_\_\_式 $(x + 4)$  是  $(x^2 + 6x + 8)$  的\_\_\_\_\_式

4.  $(x^2 + 10x + 25) = (x + 5)(x + 5)$

 $(x + 5)$  是  $(x^2 + 10x + 25)$  的\_\_\_\_\_式 $(x^2 + 10x + 25)$  是  $(x + 5)$  的\_\_\_\_\_式

5.  $x^2 - 9x + 8 = (x - 1)(x - 8)$

請圈出  $x^2 - 9x + 8$  的因式

$(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 8) \cdot (x - 8) \cdot$

$(x^2 - 9x + 8) \cdot 1 \cdot 8 \cdot (x - 1)(x - 8)$

6.  $2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)(2x + 5)$

請圈出  $2x^2 + 3x - 5$  的因式

$(x - 1) \cdot (2x + 5) \cdot (x - 1)(2x + 5) \cdot$

$(2x^2 + 3x - 5) \cdot 1 \cdot x \cdot x^2 \cdot 2(x - 1)$



概念

## ③ 因式分解的意義



①  $2 \times 3 = 6$

$$\Rightarrow \boxed{6 = 2 \times 3}$$



☆ 將一個  $x$  的二次式寫成兩個  $x$  的一次式乘積，我們稱這的過程為這個二次式的\_\_\_\_\_。

②  $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)}$$

☆筆記

請將  $(x^2 - 5x + 6)$  因式分解

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x-2 \overline{) x^2 - 5x + 6} \\ \underline{x^2 - 5x + 6} \\ 0 \end{array}$$



## 牛刀小試 3

1. 若  $(x+2)$  是  $(x^2 - 7x - 18)$  的因式，請因式分解  $x^2 - 7x - 18$ 。

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad x + ( \quad ) \\ x+2 \overline{) x^2 + \quad 7x \quad} + 10 \\ \underline{x^2 + ( \quad )x} \\ \quad ( \quad )x + 10 \\ \underline{( \quad )x + ( \quad )} \\ \quad \quad ( \quad ) \end{array}$$

2. 若  $(x+6)$  是  $(x^2 + 13x + 42)$  的因式，請因式分解  $x^2 + 13x + 42$ 。

3. 若  $(x-2)$  是  $(x^2 + 6x - 16)$  的因式，請因式分解  $x^2 + 6x - 16$ 。

4. 若  $(x+3)$  是  $(x^2 - 4x - 21)$  的因式，請因式分解  $x^2 - 4x - 21$ 。



## 例題 ① 因式分解的意義



若  $6x^2 + x - 5$  可以被因式分解為  $(2x - 3)(ax + b)$ ，則  $a$  和  $b$  的值是多少？

☆筆記



## 牛刀小試 4

1. 若  $12x^2 + 5x - 2$  可以被分解為  $(3x + 2)(ax + b)$ ，則  $a$  和  $b$  值各為多少？
2. 若  $30x^2 - x - 1$  可以被分解為  $(5x - 1)(ax + b)$ ，則  $a$  和  $b$  的值各為多少？
3. 若  $2x^2 - x - 6$  可以被分解為  $(2x + a)(bx - 2)$ ，則  $a$  和  $b$  的值各為多少？
4. 若  $3x^2 + 16x + 5$  可以被分解為  $(x + a)(bx + 1)$ ，則  $a$  和  $b$  的值各為多少？
5. 若  $4x^2 - 20x + 21$  可以被分解為  $(2x + a)(bx - 3)$ ，則  $a$  和  $b$  的值各為多少？



◎像  $A \times B$  和  $A \times C$  這樣子的多項式，我們說  $A$  是他們的\_\_\_\_\_。

〈例〉

❶ 6 和 10

❷  $2x$  和  $x^2$

❸  $3(x+1)$  和  $(x+1)^2$

☆筆記

❶ 公因數是否只有一個？

❷ 公因式是否只有一個？



### 牛刀小試 5

1. 下列各多項式中，哪些是  $2x^2$  和  $6x$  的公因式？\_\_\_\_\_。

(A) 2

(B)  $x$

(C)  $2x$

(D)  $2x^2$

$$2x^2 = 2 \cdot x \cdot x$$

$$6x = (\quad) \cdot x$$

2. 下列各多項式中，哪些是  $3x^2$  和  $9x$  的公因式？\_\_\_\_\_。

(A) 1

(B) 3

(C)  $x$

(D)  $3x$

(E)  $3x^2$

3. 下列各多項式中，哪些是  $(2x-1)(x+4)$  和  $(2x-1)(x+5)$  的公因式？

\_\_\_\_\_。

(A)  $x+4$

(B)  $x+5$

(C)  $2x-1$

(D)  $2x+1$

4. 下列各多項式中，哪些是  $(2x+1)^2$  和  $(2x+1)(x+5)$  的公因式？

\_\_\_\_\_。

(A)  $2x$

(B)  $2x+1$

(C)  $(2x+1)^2$

(D)  $(2x+1)(x+5)$

5. 下列各多項式中，哪些是  $(3x+1)(x+7)$  和  $(3x+1)^2$  的公因式？

\_\_\_\_\_。

(A)  $x$

(B)  $3x+1$

(C)  $x+7$

(D)  $(3x+1)(x+7)$



概念

## ⑤ 利用提出公因式做因式分解



◎原理

$$A \times B + C =$$

$$\Rightarrow A \times B + A \times C =$$

〈例〉

①  $ax + bx$

②  $x^2 - 2x$

③  $3a^2 + 6a$

☆筆記



## 牛刀小試 6

1. 利用提出公因式做因式分解

(1)  $ax - bx$

(2)  $x^2 + x$

(3)  $7x^2 + 8x$

(4)  $9x^2 - 4x$

2. 利用提出公因式做因式分解

(1)  $2ax + 4bx$

(2)  $3x^2 - 15x$

(3)  $7x^2 + 14x$

(4)  $5a^2 - 10a$



## 例題 ② 提出公因式練習 1



(1)  $x(3x-2)-x(x+1)$

(2)  $a(1-2a)+a(3a+5)$

☆筆記



### 牛刀小試 7

1. 因式分解下列各式

(1)  $x^2+x(x+1)$

(2)  $3x^2+x(x-1)$

(3)  $4x^2+x(2x+3)$

(4)  $x(x+1)+x(2x-3)$

2. 因式分解下列各式

(1)  $x^2-x(2x-1)$

(2)  $4x^2-x(x+1)$

(3)  $3x^2-x(2x-5)$

(4)  $x(2x+5)-x(3-3x)$



## 例題 ③ 提出公因式練習 2



(1)  $(x-2)(x+3) + (x+2)(x-2)$       (2)  $(2x-5)^2 - (2x-5)(3x-1)$

☆筆記



### 牛刀小試 8

1. 因式分解下列各式

(1)  $x(x-1) + 2(x-1)$

提 = (            ) [ (            ) + (            ) ]

併 = (            ) (            )

(2)  $x(3x+2) - 5(3x+2)$

(3)  $4x(x+5) - (x+5)(3x+2)$

(4)  $(7x+3)(4x+5) + (2x-5)(4x+5)$

2. 因式分解下列各式

(1)  $(3x-4)^2 - (3x-4)$

(2)  $(2x-5)^2 - 2(2x-5)$

(3)  $2(x-3)^2 - (x-3)$

(4)  $(2x-3)^2 + (2x-3)(x+1)$





概念

⑥  $a-b$  和  $b-a$  差多少？問題： $(a-b)$ 和 $(b-a)$ 一樣嗎？

①  $3-2=$

②  $a-b$ 和 $b-a$ 一樣嗎？為什麼？

$2-3=$

☆ $(3-2)=$

☆ $a-b$ 和 $b-a$ 差多少？

整理：

$(a-b)=$

$(a-b)^{\text{奇}}=$

$(a-b)^2=$

$(a-b)^{\text{偶}}=$

☆筆記



## 牛刀小試 9

1. 請在空格中填入適當的符號

(1)  $+(2-x)=\square(x-2)$

(2)  $-(3-4x)=\square(4x-3)$

(3)  $+5(2-3x)=\square 5(3x-2)$

(4)  $-x(5-3x)=\square x(3x-5)$

2. 請在空格中填入適當的符號

(1)  $+(2-x)^2=\square(x-2)^2$

(2)  $-(2-x)^2=\square(x-2)^2$

(3)  $+5(2-3x)^2=\square 5(3x-2)^2$

(4)  $-x(2-5x)^2=\square x(5x-2)^2$

**例題****4****先變號再提出公因式**

(1)  $(3x-4)(2x+1) + (4-3x)(x-5)$       (2)  $(2-3x)^2 + (6x-4)$

☆筆記

**牛刀小試 10****1. 因式分解下列各式**

(1)  $x(x-1) - (1-x)$

$$-(1-x) = +(x-1)$$

$$= x \cdot (x-1) \boxed{+} 1 \cdot \underline{(x-1)}$$

提 = (      ) [ (      ) + (      ) ]

併 = (      ) (      )

(2)  $2x(x-2) + (2-x)$

(3)  $3x(2x-1) + (1-2x)(x-3)$

(4)  $(3x-2)(x-7) + (2x-1)(7-x)$

**2. 因式分解下列各式**

(1)  $(3-4x)^2 + (8x-6)$

(2)  $(1-2x)^2 + (8x-4)$

(3)  $(7x-3)^2 + 5x(3-7x)$

(4)  $(2x-5)^2 - (x-6)(5-2x)$



概念

## ⑦ 利用平方差公式做因式分解



◎原理 平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$a^2-b^2=\underline{\hspace{2cm}} \text{ 稱為 } \underline{\hspace{2cm}}$$

〈例〉因式分解

①  $x^2-4$

②  $9x^2-16$

☆筆記

(1) ①  $9=\underline{\hspace{2cm}}$

②  $16=\underline{\hspace{2cm}}$

③  $25=\underline{\hspace{2cm}}$

(2) ①  $9x^2=\underline{\hspace{2cm}}$

②  $16x^2=\underline{\hspace{2cm}}$

③  $25x^2=\underline{\hspace{2cm}}$



## 牛刀小試 11

1.  $a^2-9$

$=(\quad)^2-(\quad)^2$

$=(\quad + \quad)(\quad - \quad)$

5.  $36x^2-49$

$=(\quad)^2-(\quad)^2$

$=(\quad + \quad)(\quad - \quad)$

2.  $x^2-16$

6.  $64x^2-9$

3.  $y^2-25$

7.  $81x^2-25$

4.  $c^2-100$

8.  $9x^2-1$

**例題****5 先提公因式再利用平方差公式**

因式分解下列各式

(1)  $2a^2 - 8$

(2)  $-18x^2 + 50$

(3)  $(x+1)^2 - 9$

☆筆記

**牛刀小試 12**

1.  $5x^2 - 20$

提數  $= ( ) [ ( )^2 - ( )^2 ]$

平方差  $= ( ) [ ( ) + ( ) ] [ ( ) - ( ) ]$

2.  $36x^2 - 100$

3.  $-12x^2 + 27$

4.  $-24x^2 + 6$

5.  $(x+1)^2 - 4$

$= ( )^2 - ( )^2$

$= [ ( ) + ( ) ] [ ( ) - ( ) ]$

$= ( ) ( )$

$= ( ) ( )$

6.  $(2x+3)^2 - 64$

7.  $16 - (x+2)^2$

8.  $(5x-3)^2 - (x-2)^2$

$= [ ( ) + ( ) ] [ ( ) - ( ) ]$

$= ( ) ( )$

$= ( ) ( )$



概念

⑧

## 利用和或差的平方公式做因式分解



◎原理

和的平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 差的平方公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 

$$\textcircled{1} \quad a^2+2ab+b^2=$$

$$\textcircled{2} \quad a^2-2ab+b^2=$$

☆筆記

〈例〉因式分解下列各式

$$1. \quad \textcircled{1} \quad x^2+2 \cdot x \cdot 3+3^2=(\quad)^2 \quad 2. \quad \textcircled{1} \quad x^2+6x+9=$$

$$\textcircled{2} \quad x^2-2 \cdot x \cdot 5+5^2=(\quad)^2 \quad \textcircled{2} \quad x^2-10x+25=$$



## 牛刀小試 13

1. 因式分解下列各式

$$(1) \quad x^2+2 \cdot x \cdot 4+4^2=(\quad)^2$$

$$(2) \quad x^2+2 \cdot x \cdot 6+6^2=(\quad)^2$$

$$(3) \quad x^2-2 \cdot x \cdot 7+7^2=(\quad)^2$$

$$(4) \quad x^2-2 \cdot x \cdot 8+64=(\quad)^2$$

2. 因式分解下列各式

$$(1) \quad x^2+10x+25$$

$$(2) \quad x^2+16x+64$$

$$(3) \quad x^2+20x+100$$

$$(4) \quad x^2-24x+144$$

**例題****6****利用和或差的平方公式做因式分解**

因式分解下列各式

(1)  $9x^2 + 12x + 4$

(2)  $16x^2 - 8x + 1$

(3)  $2x^2 + 12x + 18$

☆筆記

**牛刀小試 14**

1. 因式分解下列各式

(1)  $4x^2 + 4x + 1$

(2)  $9x^2 + 12x + 4$

(3)  $4y^2 - 20y + 25$

(4)  $25y^2 - 30y + 9$

2. 因式分解下列各式

(1)  $3x^2 + 12x + 12$

(2)  $2x^2 + 24x + 72$

(3)  $3y^2 - 30y + 75$

(4)  $5y^2 - 20y + 20$



# 解 答 篇

## 牛刀小試 1

- (1)否；(2)是；(3)否
- (1)是；(2)是；(3)是
- (1)是；(2)不是
- (1)是；(2)不是

## 牛刀小試 2

- 因；倍
- 因；倍
- 倍；因
- 因；倍
- $(x-1)$ 、 $(x-8)$ 、 $(x^2-9x+8)$ 、 $1$ 、 $8$   
 $(x-1)(x-8)$
- $(x-1)$ 、 $(2x+5)$ 、 $(x-1)(2x+5)$ 、  
 $(2x^2+3x-5)$ 、 $1$ 、 $2(x-1)$

## 牛刀小試 3

- $(x+2)(x-9)$
- $(x+7)(x+6)$
- $(x+8)(x-2)$
- $(x-7)(x+3)$

## 牛刀小試 4

- $a=4$ 、 $b=-1$
- $a=6$ 、 $b=1$
- $a=3$ 、 $b=1$
- $a=5$ 、 $b=3$
- $a=-7$ 、 $b=2$

## 牛刀小試 5

- (A)(B)(C)
- (A)(B)(C)(D)
- (C)
- (B)
- (B)

## 牛刀小試 6

- $x(a-b)$
  - $x(x+1)$
  - $x(7x+8)$
  - $x(9x-4)$
- $2x(a+2b)$
  - $3x(x-5)$
  - $7x(x+2)$
  - $5a(a-2)$

## 牛刀小試 7

- $x(2x+1)$   
提= $x[x+(x+1)]$   
去= $x(x+x+1)$   
併= $x(2x+1)$

- $x(4x-1)$
  - $x(6x+3)$ 或 $3x(2x+1)$
  - $x(3x-2)$

- $x(-x+1)$ 或 $-x(x-1)$   
提= $x[x-(2x-1)]$   
去= $x(x-2x+1)$   
併= $x(-x+1)$

- $x(3x-1)$
  - $x(x+5)$
  - $x(5x+2)$

## 牛刀小試 8

- $(x-1)(x+2)$   
提= $(x-1)[(x)+(2)]$   
併= $(x-1)(x+2)$

- $(3x+2)(x-5)$
  - $(x+5)(x-2)$
  - $(4x+5)(9x-2)$

- $(3x-4)(3x-5)$
  - $(2x-5)(2x-7)$
  - $(x-3)(2x-7)$
  - $(2x-3)(3x-2)$

## 牛刀小試 9

- - +
  - 
  - +

- +
  - 
  - +
  -

## 牛刀小試 10

- $(x-1)(x+1)$   
提= $(x-1)[(x)+(1)]$   
併= $(x-1)(x+1)$

- $(x-2)(2x-1)$
  - $(2x-1)(2x+3)$
  - $(x-7)(x-1)$

- $(4x-3)(4x-1)$
  - $(2x-1)(2x+3)$
  - $(7x-3)(2x-3)$ 或 $(3-7x)(3-2x)$
  - $(2x-5)(3x-11)$ 或 $(5-2x)(11-3x)$

## 牛刀小試 11

- $(a-3)(a+3)$
- $(x-4)(x+4)$
- $(y-5)(y+5)$
- $(c-10)(c+10)$
- $(x-7)(x+7)$
- $(6x-7)(6x+7)$
- $(8x-3)(8x+3)$
- $(9x-5)(9x+5)$
- $(3x-1)(3x+1)$
- $(5x-7)(5x+7)$

## 牛刀小試 12

- $5(x-2)(x+2)$
- $4(3x-5)(3x+5)$
- $-3(2x-3)(2x+3)$
- $-6(2x-1)(2x+1)$
- $(x+3)(x-1)$
- $(2x-5)(2x+11)$
- $(x+6)(2-x)$ 或 $(x+6)(-x+2)$
- $(6x-5)(4x-1)$

## 牛刀小試 13

- $(x+4)^2$
  - $(x+6)^2$
  - $(x-7)^2$
  - $(x-8)^2$

- $(x+5)^2$
  - $(x+8)^2$
  - $(x+10)^2$
  - $(x-12)^2$

## 牛刀小試 14

- $(2x+1)^2$
  - $(3x+2)^2$
  - $(2y-5)^2$
  - $(5y-3)^2$

- $3(x+2)^2$
  - $2(x+6)^2$
  - $3(y-5)^2$
  - $5(y-2)^2$