



B5 1-1 連比例



概念 ① 連比的意義



☆ 馥麗用 2 小杯蘋果汁、3 小杯鳳梨汁和 4 小杯芭樂汁，調製成 1 大杯平安順利快樂果汁，其中蘋果汁、鳳梨汁和芭樂汁的比為 _____，像這種 3 個或 3 個以上的比，我們就稱為 _____。

☆ 如果馥麗要製作 2 大杯平安順利快樂果汁，請問：她要準備蘋果汁 _____ 小杯、鳳梨汁 _____ 小杯、和芭樂汁 _____ 小杯。



你發現了什麼？

① $2:3:4 = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$ 。

② $2:3:4 = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$ 。

③ $2:3:4 = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}$ 。

☆ 筆記



牛刀小試 1

1. 瑞好調製一杯黃金比例的木瓜牛奶，其原料是木瓜 4 份，牛奶 5 份，冰塊 1 份，請完成下列表格，並回答問題。

木瓜牛奶	木瓜(份)	牛奶(份)	冰塊(份)
1 杯	4	5	1
2 杯			
6 杯	24		

(1) 1 杯木瓜牛奶中所含的木瓜、牛奶、冰塊的份量比為 4:5:1。

(2) 若調製 2 杯口味相同的木瓜牛奶，則木瓜、牛奶、冰塊的份量比為 _____。

(3) $4:5:1 = \underline{\hspace{1cm}} : 10 : \underline{\hspace{1cm}}$

2. 晨希家飲料店只賣紅茶 20 元，珍珠奶茶 30 元，多多綠茶 50 元，三種飲料完成下列表格並回答問題。

飲料(杯)	紅茶(杯)	珍珠奶茶(杯)	多多綠茶(杯)
原價(元)	20	30	50
半價(元)			
七折價(元)	14		

- (1) 這三種飲料的價錢比是 _____。
- (2) 因疫情關係，全部飲品半價大優待，三種飲料的價錢比是 _____。

(3) $20:30:\underline{50} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} : \underline{25}$

原價
半價

同 $\times 0.5$

3. 利用連比性質完成下表

(1) $3:4:\underline{5} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} : \underline{10}$

同 $\times 2$

(2) $2:\underline{5}:8 = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{15} : \underline{\hspace{1cm}}$

(3) $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3} = 6:\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$



☆ 在概念 1 提到馥麗利用 2 小杯蘋果汁、3 小杯鳳梨汁和 4 小杯芭樂汁，調製成 1 大杯平安順利快樂果汁，好朋友家慧也想調製出味道一樣的果汁，如果她用 a 小杯蘋果汁、 b 小杯鳳梨汁和 c 小杯芭樂汁，請問 $a:b:c=$ _____，像這樣的式子，稱為_____。



☆ ① $a:b=2:3 \Rightarrow$ _____

② $a:b:c=2:3:4 \Rightarrow ?$

③ $a:b:c=2:3:4 \Rightarrow a:b=$ _____。

$b:c=$ _____。

$a:c=$ _____。

☆筆記



牛刀小試 2

1. 1 杯芋見你真好是用 3 份芋圓，2 份芋頭、5 份牛奶調製而成。

(1) 調製 1 杯芋見你真好所需的原料芋圓、芋頭、牛奶的份量比
= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$

(2) 芋圓份量：芋頭份量= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$
芋頭份量：牛奶份量= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$
芋圓份量：牛奶份量= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$

(3) 若想要調製出數杯味道一樣的芋見你真好，則需要 a 份芋圓、 b 份芋頭、 c 份牛奶，
則 $a:b:c=$ _____

此時 $a:b=$ _____

$b:c=$ _____

$a:c=$ _____

2. 采依調製一壺焦糖奶茶，原料是 7 杯紅茶，2 杯鮮奶，1 杯焦糖（杯子大小相同）

(1) 紅茶、鮮奶、焦糖的份量比
= $\underline{\hspace{1cm}}$

(2) 紅茶份量：鮮奶份量= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$
鮮奶份量：焦糖份量= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$
紅茶份量：焦糖份量= $\underline{\hspace{1cm}}:\underline{\hspace{1cm}}$

(3) 若想要調製出數杯味道一樣的焦糖奶茶，則需 a 杯紅茶、 b 杯鮮奶、 c 杯焦糖，
則 $a:b:c=$ _____

此時 $a:b=$ _____

$b:c=$ _____

$a:c=$ _____



概念

③ $a:b:c=2:3:4$ 的意義☆ $a:b:c=2:3:4$ 是什麼意思？① a 一定是 2， b 一定是 3， c 一定是 4 嗎？② a 是 _____， b 是 _____， c 是 _____。③ 假設 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____。(其中 _____)☆ $a:b:c=2:3:4$ 還有沒有其他的表示方法？

$$a:b:c=2:3:4 \Rightarrow a:2= \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$\Rightarrow a= \underline{\hspace{2cm}}，b= \underline{\hspace{2cm}}，c= \underline{\hspace{2cm}}。$$

整理 $a:b:c=2:3:4 \Rightarrow$ \Rightarrow

☆筆記

$$a:b:c=2:3:4$$

請問 $a、b、c$ 誰最大？

$$2a:3b=4:9$$

請問 $a:b=?$ 

牛刀小試 3

1. 若 $a:b:c=1:3:5$

(1) $a:1=b:\underline{\hspace{2cm}}=c:\underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{a}{1} = \frac{b}{\square} = \frac{c}{\square}$

(3) 表示 a 是 _____ 份， b 是 _____ 份，
 c 是 _____ 份。(4) 假設 1 份是 r (其中 r _____ 0)
 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____。2. 若 $a:b:c=3:4:5$

(1) $a:\underline{\hspace{2cm}}=b:4=c:\underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{a}{\square} = \frac{b}{4} = \frac{c}{\square}$

(3) 表示 a 是 _____ 份， b 是 _____ 份，
 c 是 _____ 份。(4) 假設 1 份是 r (其中 r _____ 0)
 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____。3. (1) 若 $a:5=b:7=c:6$

則 $a:b:c=$ _____。

(2) 若 $a:2=b:3=c:5$

則 $a:b:c=$ _____。

4. (1) 若 $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$

則 $a:b:c=$ _____。

(2) 若 $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{c}{9}$

則 $a:b:c=$ _____。

5. (1) $3a:4b:c=9:8:1$

則 $a:b:c=$ _____。

(2) $5a:b:2c=10:3:8$

則 $a:b:c=$ _____。

**例題****1 連比的計算**

(1) 若 $2:3:4=6:x:y$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____ 。

(2) 若 $2:3:4=a:7:c$

則 $a=$ _____ , $c=$ _____ 。

☆筆記

**牛刀小試 4**

同 $\times \frac{4}{3}$

1. (1) 若 $3:4:6=6:x:y$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____

(2) 若 $3:2:5=x:12:y$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____

(3) 若 $8:12:9=x:y:27$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____

(4) 若 $10:6:9=x:30:y$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____

2. (1) 若 $3:2:5=4:x:y$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____

2 \times

5 \times

(2) 若 $6:3:2=x:y:11$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____

(3) 若 $5:4:9=x:6:y$

則 $x=$ _____ , $y=$ _____



例題 ② 求連比 1



(1) 若 $a:b=2:3$ 且 $b:c=3:4$

求 $a:b:c=?$

☆筆記

(2) 若 $x:z=8:7$ 且 $y:z=3:7$

求 $x:y:z=?$



牛刀小試 5

1. (1) 若 $a:b=5:4$ ，且 $b:c=4:3$

求 $a:b:c=$ _____

$a:b:c$

$5:4$

$4:3$

(2) 若 $a:c=5:3$ ，且 $b:c=2:3$

求 $a:b:c=$ _____

$a:b:c$

___ : ___

___ : ___

___ : ___ : ___

2. (1) $a:1=b:3$ ，且 $a:c=1:4$

求 $a:b:c=$ _____

(2) $a:2=c:7$ ，且 $b:3=c:7$

求 $a:b:c=$ _____

3. (1) 若 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$, 且 $b : c = 4 : 5$
求 $a : b : c =$ _____

(2) 若 $\frac{a}{5} = \frac{c}{7}$, 且 $\frac{a}{5} = \frac{b}{9}$
求 $a : b : c =$ _____

4. (1) 若 $2a : b = 4 : 3$, 且 $b : c = 3 : 5$
求 $a : b : c =$ _____

(2) 若 $a : 3b = 5 : 12$, 且 $2a : 3c = 10 : 27$
求 $a : b : c =$ _____



例題 ③ 求連比 2



(1) 若 $a:b=2:3$ 且 $a:c=3:4$

求 $a:b:c=?$

☆筆記

(2) 若 $x:y=8:7$ 且 $x:z=3:2$

求 $x:y:z=?$



牛刀小試 6

1. (1) 若 $x:y=5:6$ ，且 $x:z=10:3$

求 $x:y:z=$ _____

$x: y: z$

$5: 6$

$10: \quad : 3$

2. (1) 若 $x:y=4:5$ ，且 $y:z=3:2$

求 $x:y:z=$ _____

(2) 若 $x:y=7:4$ ，且 $y:z=8:5$

求 $x:y:z=$ _____

$x: y: z$

(2) 若 $x:z=7:10$ ，且 $y:z=5:4$

求 $x:y:z=$ _____

3. (1) 若 $\frac{x}{3} = \frac{z}{2}$, 且 $y : z = 2 : 5$
求 $x : y : z =$ _____

(2) 若 $\frac{x}{5} = \frac{y}{4}$, 且 $\frac{x}{3} = \frac{z}{2}$
求 $x : y : z =$ _____

4. (1) 若 $3x : 2y = 9 : 10$, 且 $x : z = 4 : 7$,
求 $x : y : z =$ _____

(2) 若 $x : y = 3 : 8$, 且 $2y : z = 5 : 1$
求 $x : y : z =$ _____



例題 4 求連比 3



已知 a 、 b 、 c 均不為 0，且 $2a=3b$ ， $4b=5c$

求(1) $a:b$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$

☆筆記



牛刀小試 7

1. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，

且 $3a=4b$ ， $3b=5c$ ，

求(1) $a:b$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$

3. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，

且 $4a=5c$ ， $3b=2c$ ，

求(1) $a:c$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$

2. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，

且 $3a=5b$ ， $2a=3c$ ，

求(1) $a:b$ (2) $a:c$ (3) $a:b:c$

4. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，

且 $3a=4b$ ， $3b=2c$ ，

求(1) $a:b$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$

5. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，

且 $3a=5b$ ， $2a:3c=8:9$ ，

求(1) $a:b$ (2) $a:c$ (3) $a:b:c$

6. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，

且 $\frac{a}{4}=\frac{c}{5}$ ， $3b=4c$ 。

求(1) $a:c$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$



例題 5 求連比 4



已知 a 、 b 、 c 皆不為 0，且 $2a=3b=4c$
求 $a:b:c=?$

☆筆記



牛刀小試 8

1. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，
且 $2a=3b=5c$ ，求 $a:b:c=?$
(1) $a:b$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$

2. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，
且 $3a=4b=5c$ ，求 $a:b:c=?$
(1) $a:b$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$

3. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，
且 $4a=5b=7c$ ，求 $a:b:c=?$

4. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，
且 $5a=4b=6c$ ，求 $a:b:c=?$

5. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，
且 $6a=2b=3c$ ，求 $a:b:c=?$

6. 已知 a 、 b 、 c 均不為 0，
且 $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$ ，求 $a:b:c=?$
(1) $a:b$ (2) $b:c$ (3) $a:b:c$



例題 ⑥ 連比例式的計算 1



若 $a : b : c = 2 : 3 : 4$ ，求

(1) $3a : 4b : 5c = ?$

(2) $(a+b) : (b+c) : (c+a) = ?$

☆筆記

彩元說<例 6>裡面的

a 可以直接當成 2，

b 可以當成 3， c 可以當成 4，

你覺得她說的對嗎？



牛刀小試 9

1. 若 $a : b : c = 1 : 2 : 3$ ，求

(1) $2a : 3b : 4c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

設 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $(a+b) : (b+c) : (c+a) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 若 $a : b : c = 6 : 5 : 2$ ，求

(1) $a : 5b : 3c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

設 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $c = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) $(a-b) : (b-c) : (a-c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若 $a : b : c = 3 : 12 : 5$ ，求

(1) $7a : b : 2c = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $(a+b) : (b+c) : (a+c) = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 若 $a : b : c = 2 : 3 : 6$ ，求

$(a+2b) : (3b+c) : (4a+c)$

$= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若 $a : b : c = 6 : 3 : 8$ ，求

$(2a-b) : (3b-c) : (c-a)$

$= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 若 $a : b : c = 1 : 3 : 5$ ，求

$(a+3b) : (5b+c) : (10a+2c)$

$= \underline{\hspace{2cm}}$ 。



例題 7 連比例式的計算 2



已知 $a:b:c=2:3:4$ ，則：

(1) 若 $b=15$ ，求 $a=?$ $c=?$

(2) $a+b+c=27$ ，求 $a=?$ $b=?$ $c=?$

☆筆記



牛刀小試 10

1. 已知 $a:b:c=1:2:3$

(1) 若 $b=10$ ，求 $a=$ _____， $c=$ _____。

(2) 若 $a+b+c=24$ ，則

$a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____

(1) 設 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____

2. 已知 $a:b:c=6:3:2$

(1) 若 $a=48$ ，求 $b=$ _____， $c=$ _____。

(2) 若 $a+b+c=55$ ，則

$a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____。

(1) 設 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____

3. 已知 $a:b:c=3:5:7$

(1) 若 $c=42$ ，求 $a=$ _____， $b=$ _____。

(2) 若 $a+b+c=60$ ，則

$(a+1):(b+1):(c+1)=$ _____。

4. 已知 $3a=2b=c$

(1) 若 $b=3$ ，求 $a=$ _____， $c=$ _____。

(2) $a:b:c=$ _____。

(3) 若 $a+b+c=44$ ，則

$a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____。

5. 已知 $2a=3b=6c$

(1) 若 $a=6$ ，求 $b=$ _____， $c=$ _____。

(2) $a:b:c=$ _____。(3) 若 $a+b+c=30$ ，則

$a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____。

**例題****8****連比例的應用**

皓柔、珮瑜、苡安都喜歡動漫，他們一起出錢買了一個 1200 元的公仔，已知：三人出錢的比為 3 : 4 : 5，則三分別出了多少錢？

☆筆記

**牛刀小試 11**

1. 玉米蛋炒飯中，白飯、玉米、蛋的重量比是 5 : 2 : 1，若超好吃玉米蛋炒飯是 560 克，則白飯要準備_____克，
玉米要準備_____克，蛋要準備_____克。
- 設 白飯 ____克
玉米 ____克
蛋 ____克

2. 冠狀病毒愛心捐款，甲、乙、丙三人共捐了 4800 元，已知甲、乙、丙三人捐款的比是 5 : 4 : 3，則三人各捐多少錢？

3. 已知一個三角形的三邊長比是 5 : 4 : 3，且三邊長的和(即周長)是 60 公分，則三邊長中最短的邊長是_____公分。



解 答 篇

牛刀小試 1

1.

木瓜 牛奶	木瓜 (份)	牛奶 (份)	冰塊 (份)
1 杯	4	5	1
2 杯	8	10	2
6 杯	24	30	6

- (1) $4:5:1$
 (2) $8:10:2$
 (3) $4:5:1=8:10:2$

2.

飲料 (杯)	紅茶 (杯)	珍珠奶 茶(杯)	多多綠 茶(杯)
原價 (元)	20	30	50
半價 (元)	10	15	25
七折價 (元)	14	21	35

- (1) $20:30:50$
 (2) $10:15:25$
 (3) $20:30:50=\underline{10}: \underline{15}: 25$
 3. (1) $3:4:5=\underline{6}: \underline{8}: 10$
 (2) $2:5:8=\underline{6}: 15: \underline{24}$
 (1) $1: \frac{1}{2}: \frac{1}{3}=6: \underline{3}: \underline{2}$

牛刀小試 2

1.

- (1) $3:2:5$
 (2) $3:2$
 $2:5$
 $3:5$
 (3) $3:2:5$
 $3:2$
 $2:5$
 $3:5$

2.

- (1) $7:2:1$
 (2) $7:2$
 $2:1$
 $7:1$
 (3) $7:2:1$
 $7:2$
 $2:1$
 $7:1$

牛刀小試 3

1.

- (1) $3, 5$
 (2) $3, 5$
 (3) $1, 3, 5$
 (4) $(r \neq 0)$
 $1r, 3r, 5r$

2.

- (1) $3, 5$
 (2) $3, 5$
 (3) $3, 4, 5$
 (4) $(r \neq 0)$
 $3r, 4r, 5r$

3.

- (1) $5:7:6$
 (2) $2:3:5$

4.

- (1) $4:5:6$

(2) $3:7:9$

5. (1) $3:2:1$

(2) $2:3:4$

牛刀小試 4

1.

- (1) $x=8, y=12$
 (2) $x=18, y=30$
 (3) $x=24, y=36$
 (4) $x=50, y=45$

2.

- (1) $x=\frac{8}{3}, y=\frac{20}{3}$
 (2) $x=33, y=\frac{33}{2}$
 (3) $x=\frac{15}{2}, y=\frac{27}{2}$

牛刀小試 5

1.

- (1) $5:4:3$
 (2) $5:2:3$

2.

- (1) $1:3:4$
 (2) $2:3:7$

3.

- (1) $3:4:5$
 (2) $5:9:7$

4.

- (1) $2:3:5$
 (2) $5:4:9$

牛刀小試 6

1.

- (1) $10:12:3$
 (2) $14:8:5$

2.

- (1) $12:15:10$
 (2) $14:25:20$

3.

- (1) $15:4:10$
 (2) $15:12:10$

4.

- (1) $12:20:21$
 (2) $15:40:16$

牛刀小試 7

1.

- (1) $4:3$
 (2) $5:3$
 (3) $20:15:9$

2.

- (1) $5:3$
 (2) $3:2$
 (3) $15:9:10$

3.

- (1) $5:4$
 (2) $2:3$
 (3) $15:8:12$

4.

- (1) $4:3$
 (2) $2:3$
 (3) $8:6:9$

5.

- (1) $5:3$
 (2) $4:3$

(3) $20:12:15$

6.

- (1) $4:5$
 (2) $4:3$
 (3) $12:20:15$

牛刀小試 8

1. $15:10:6$
 2. $20:15:12$
 3. $35:28:20$
 4. $12:15:10$
 5. $1:3:2$
 6. $4:5:7$

牛刀小試 9

1.

- (1) $1:3:6$
 (2) $3:5:4$

2.

- (1) $6:25:6$
 (2) $1:3:4$

3.

- (1) $21:12:10$
 (2) $15:17:8$

4.

- $8:15:14$

5.

- $9:1:2$

6.

- $1:2:2$

牛刀小試 10

1.

- (1) $a=5, c=15$
 (2) $a=4, b=8, c=12$

2.

- (1) $b=24, c=16$
 (2) $a=30, b=15, c=10$

3.

- (1) $b=18, b=30$
 (2) $13:21:29$

4.

- (1) $a=2, c=6$
 (2) $2:3:6$
 (3) $a=8, b=12, c=24$

5.

- (1) $b=4, c=2$
 (2) $3:2:1$
 (3) $a=15, b=10, c=5$

牛刀小試 11

1. 白飯350克, 玉米140克, 蛋70克
 2. 甲2000元, 乙1600元, 丙1200元
 3. 15



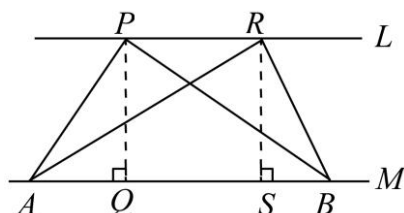
B5 1-2 平行線截比例線段



概念 ① 同底等高的△面積相等



☆



已知： $L \parallel M$ ， \overline{PQ} 和 \overline{RS} 分別為
 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ABR$ 的高

請問：(1) \overline{PQ} 和 \overline{RS} 是否相等？為什麼？

(2) $\triangle ABP$ 和 $\triangle ABR$ 面積是否相等？
為什麼？

☆筆記

因為

所以



整理

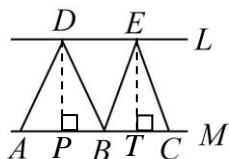


牛刀小試 1

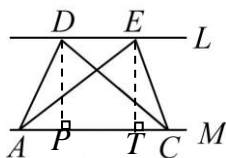
1. 如圖， $L \parallel M$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 2$

(1) $\triangle ABD$ 的高 \overline{DP} 和 $\triangle BCE$ 的高 \overline{ET}
相等嗎？

(2) 求 $\triangle ABD$ 面積： $\triangle BCE$ 面積＝？

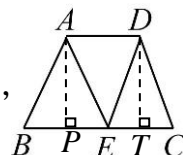


2. 如圖， $L \parallel M$ ， $\triangle DAC$ 面積和 $\triangle EAC$ 面積
相等嗎？為什麼？



3. 如圖，梯形ABCD中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

E是 \overline{BC} 上的一點，且 $\overline{BE} = 5$ ，
 $\overline{EC} = 2$ 。

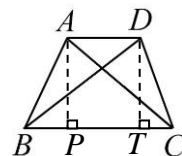


(1) $\triangle ABE$ 面積： $\triangle DEC$ 面積＝？

(2) 若 $\triangle ABE$ 面積是10，求 $\triangle DEC$ 面積＝？

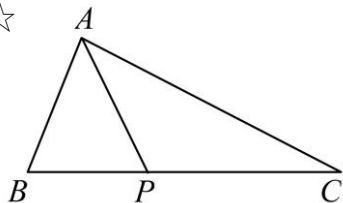
4. 如圖，梯形ABCD中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，

若 $\triangle ABC$ 面積＝15，則 $\triangle DBC$ 面積＝？





☆

已知： $\overline{BP} : \overline{PC} = 2 : 3$ 請問： $\triangle ABP$ 面積： $\triangle ACP$ 面積 = ?

☆筆記

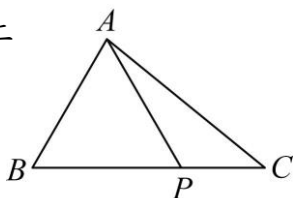


整理



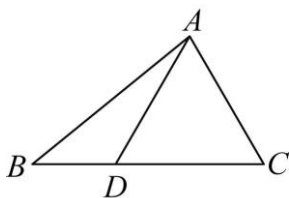
牛刀小試 2

1. $\triangle ABC$ 中， P 是 \overline{BC} 上的一點，若 $\overline{BP} = 5$ ， $\overline{CP} = 2$ ，求



- (1) 請畫出 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 上的高 \overline{AH} 。
- (2) $\triangle ABP$ 面積： $\triangle ACP$ 面積 = ?
- (3) $\triangle ABP$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = ?
- (4) 若 $\triangle ABP$ 面積 = 20，求 $\triangle ACP$ 面積 = ?

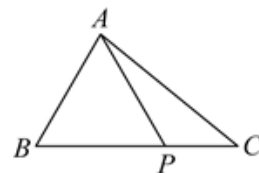
2. $\triangle ABC$ 中， D 是 \overline{BC} 上的一點，若 $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{CD} = 5$ ，求



- (1) 請畫出 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 上的高 \overline{AH} 。
- (2) $\triangle ABD$ 面積： $\triangle ACD$ 面積 = ?
- (3) $\triangle ABD$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = ?
- (4) 若 $\triangle ABD$ 面積 = 9，求 $\triangle ACD$ 面積 = ?

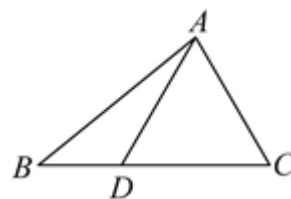
3. $\triangle ABC$ 中， P 是 \overline{BC} 上的一點，若 $\overline{BP} = 4$ ， $\overline{CP} = 3$ ，求

- (1) 請畫出 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 上的高 \overline{AH} 。
- (2) $\triangle ABP$ 面積： $\triangle ACP$ 面積 = ?
- (3) 若 $\triangle ABP$ 面積 = 20，求 $\triangle ACP$ 面積 = ?



4. $\triangle ABC$ 中， D 是 \overline{BC} 上的一點，若 $\overline{CD} = 7$ ， $\overline{DB} = 4$ ，求

- (1) 請畫出 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 上的高 \overline{AH} 。
- (2) $\triangle ABD$ 面積： $\triangle ACD$ 面積 = ?
- (3) 若 $\triangle ACD$ 面積 = 21，求 $\triangle ADB$ 面積 = ?

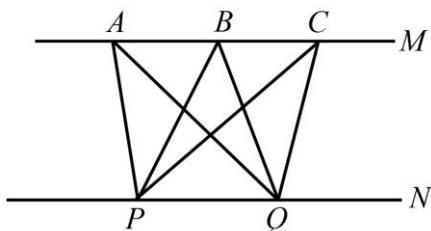




例題 1 三角形的面積比

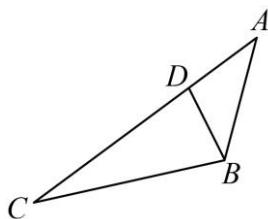


(1)



已知： $M \parallel N$ ， $\triangle PQA$ 面積是 a ，
 $\triangle PQB$ 面積是 b ， $\triangle PQC$ 面積是 c
 請比較 a 、 b 、 c 的大小？

(2)



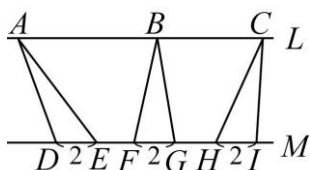
已知： $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{CD} = 12$
 求 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面積比？

☆筆記

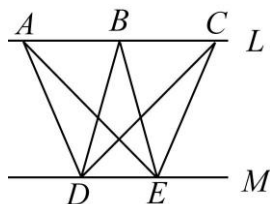


牛刀小試 3

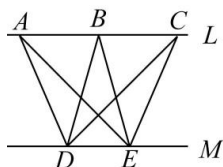
1. 已知 $L \parallel M$ ，若 $\overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HI} = 2$ ，
 則 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BFG$ 、 $\triangle CHI$ 的面積大小關係？



2. 已知 $L \parallel M$ ，則 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BDE$ 、 $\triangle CDE$ 的面積大小關係？

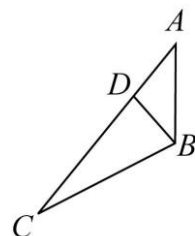


3. 已知 $L \parallel M$ ，若 $\triangle ADE$ 是 10，則 $\triangle BDE$ 、 $\triangle CDE$ 的面積為何？



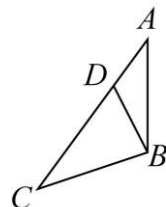
4. 已知 $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{CD} = 4$

- (1) 畫出 $\triangle ABC$ 中以 \overline{AC} 為底邊的高 \overline{BH} 。
 (2) $\triangle BAD$ 面積： $\triangle BCD$ 面積 = ?
 (3) $\triangle BAD$ 面積： $\triangle BAC$ 面積 = ?



5. 已知 $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{CD} = 5$

- (1) 畫出 $\triangle ABC$ 中以 \overline{AC} 為底邊的高 \overline{BH} 。
 (2) $\triangle BAD$ 面積： $\triangle BCD$ 面積 = ?
 (3) $\triangle BAD$ 面積： $\triangle BAC$ 面積 = ?
 (4) 若 $\triangle ABC$ 面積 = 30，則 $\triangle ABD$ 面積 = ?





☆比例線段

❶ $2:3=4:6$ 我們說

$2、3、4、6$ _____

❷ 如果 $a:b=c:d$ 我們說

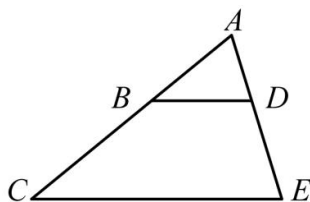
$a、b、c、d$ _____

❸ 如果 $\overline{AB}:\overline{CD}=\overline{EF}:\overline{GH}$

我們說 $\overline{AB}、\overline{CD}、\overline{EF}、\overline{GH}$

也稱為 _____

☆平行線截比例線段



❶ 若 $\overline{BD}\parallel\overline{CE}$ ， $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

則 $\overline{AD}:\overline{DE}=$ _____

❷ 若 $\overline{BD}\parallel\overline{CE}$ ，

則 $\overline{AB}:\overline{BC}=$ _____ 也就是說：這四個線段稱為 _____

❸ 若 $\overline{BD}\parallel\overline{CE}$ 可以得到

$\overline{AB}:\overline{BC}=$ _____

稱為 _____

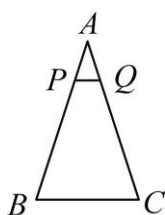
☆筆記



牛刀小試 4

1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$

若 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:4$

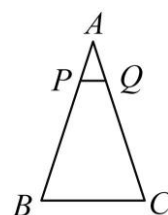


(1) $\overline{AQ}:\overline{QC}=$ _____。

(2) 若 $\overline{AQ}=6$ ，則 $\overline{QC}=$ _____。

3. $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$

若 $\overline{AP}=3$ ， $\overline{PB}=12$

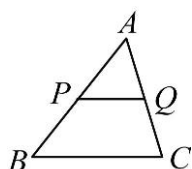


(1) $\overline{AQ}:\overline{QC}=$ _____。

(2) 若 $\overline{AQ}=4$ ，則 $\overline{QC}=$ _____。

2. $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$

若 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$

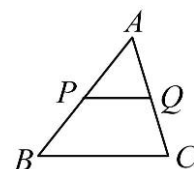


(1) $\overline{AQ}:\overline{QC}=$ _____。

(2) 若 $\overline{AQ}=6$ ，則 $\overline{QC}=$ _____。

4. $\triangle ABC$ 中， $\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$

若 $\overline{AP}=10$ ， $\overline{PB}=15$

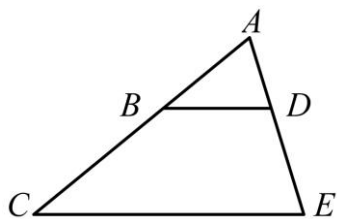


(1) $\overline{AQ}:\overline{QC}=$ _____。

(2) 若 $\overline{AQ}=8$ ，求 $\overline{QC}=$ _____。



已知 $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ ， $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE} = 2 : 3$



① $\overline{AB} : \overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$

$\overline{AD} : \overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$

$\Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$

② $\overline{CB} : \overline{CA} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$

$\overline{ED} : \overline{EA} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}}$

$\Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$

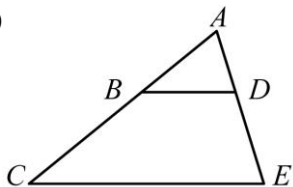
☆筆記



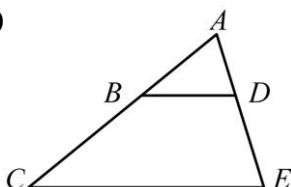
整理 平行線截比例線段性質 1+2

已知 $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$

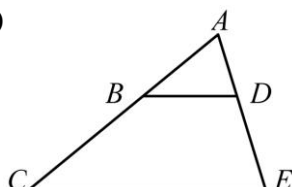
①



②



③



牛刀小試 5

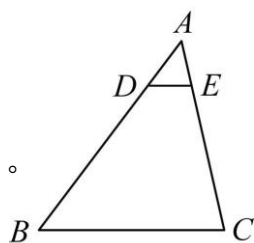
1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 5$

(1) $\overline{AE} : \overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $\overline{AE} = 5$ ，則

$\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

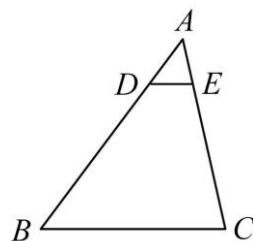


3. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{BD} : \overline{BA} = 4 : 5$

(1) $\overline{EC} : \overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $\overline{EC} = 12$ ，則 $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

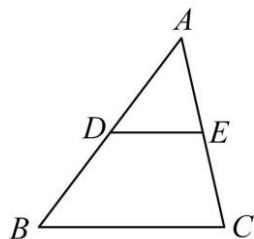


2. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{AB} = 8$

(1) $\overline{AE} : \overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $\overline{AE} = 5$ ，則 $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

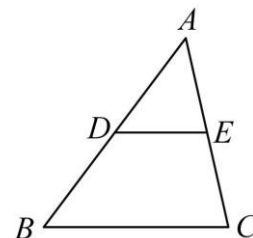


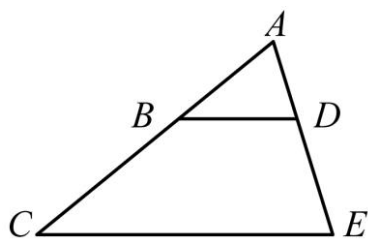
4. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{BD} = 25$ ， $\overline{AB} = 35$

(1) $\overline{EC} : \overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $\overline{AE} = 20$ ，則 $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。





已知 $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ ， $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$

我們從_____可知

① $\overline{AD} : \overline{DE} =$ _____

② $\overline{BC} : \overline{AC} =$ _____

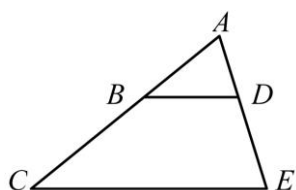
③ $\overline{AB} : \overline{AC} =$ _____

請你猜猜看 $\overline{BD} : \overline{CE} = ?$ 為什麼？

☆筆記



整理 平行線截比例線段性質 3



若 $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$

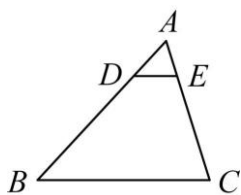
則_____



牛刀小試 6

1. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{AD} : \overline{AB} = 1 : 5$

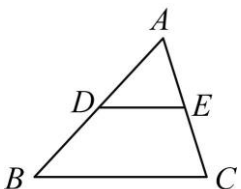


(1) $\overline{DE} : \overline{BC} =$ _____。

(2) 若 $\overline{DE} = 9$ ，則 $\overline{BC} =$ _____。

2. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{AE} : \overline{AC} = 3 : 7$

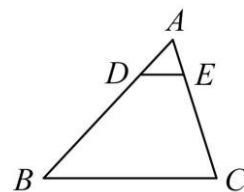


(1) $\overline{DE} : \overline{BC} =$ _____。

(2) 若 $\overline{DE} = 6$ ，則 $\overline{BC} =$ _____。

3. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

若 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{AB} = 24$



(1) $\overline{AE} : \overline{AC} =$ _____。

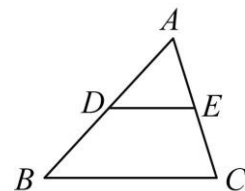
(2) 若 $\overline{AE} = 4$ ，則 $\overline{AC} =$ _____。

(3) $\overline{DE} : \overline{BC} =$ _____。

(4) 若 $\overline{DE} = 5$ ，則 $\overline{BC} =$ _____。

4. $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

且 $\overline{AE} = 21$ ， $\overline{EC} = 28$



(1) $\overline{AD} : \overline{AB} =$ _____。

(2) 若 $\overline{AD} = 27$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。

(3) $\overline{DE} : \overline{BC} =$ _____。

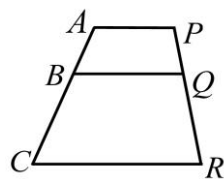
(4) 若 $\overline{DE} = 24$ ，則 $\overline{BC} =$ _____。



如右圖，在梯形 $ACPR$ 中，

已知： $\overline{AP} \parallel \overline{BQ} \parallel \overline{CR}$ ， $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$

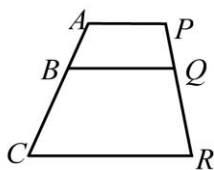
請問 $\overline{PQ} : \overline{QR} = ?$ 為什麼？



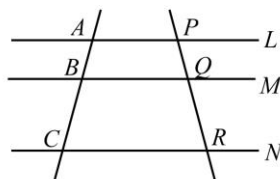
☆筆記



整理



\Rightarrow



若 $\overline{AP} \parallel \overline{BQ} \parallel \overline{CR}$

則 _____

\Rightarrow

若 $L \parallel M \parallel N$

則 _____

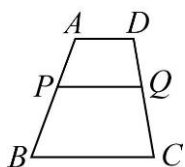


牛刀小試 7

1. 已知梯形 $ABCD$ 中，

$\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，

若 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 5$



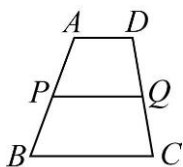
(1) $\overline{DQ} : \overline{QC} =$ _____

(2) 若 $\overline{DC} = 24$ ，求 \overline{DQ} 和 $\overline{QC} = ?$

2. 已知梯形 $ABCD$ 中，

$\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ，

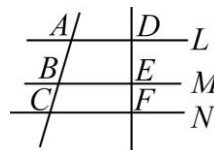
若 $\overline{AP} : \overline{AB} = 3 : 7$



(1) $\overline{DQ} : \overline{DC} =$ _____

(2) 若 $\overline{DC} = 49$ ，求 \overline{DQ} 和 $\overline{QC} = ?$

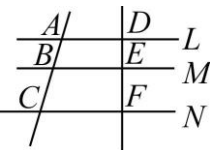
3. 已知 $L \parallel M \parallel N$ ，若 $\overline{AB} = 21$ ，
 $\overline{BC} = 12$ ，且 $\overline{DF} = 44$ ，求



(1) $\overline{DE} : \overline{DF} =$ _____。

(2) $\overline{DE} =$ _____， $\overline{EF} =$ _____。

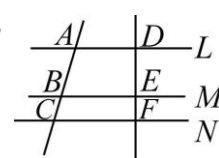
4. 已知 $L \parallel M \parallel N$ ，若 $\overline{AB} = 15$ ，
 $\overline{AC} = 40$ ，且 $\overline{DF} = 48$ ，求



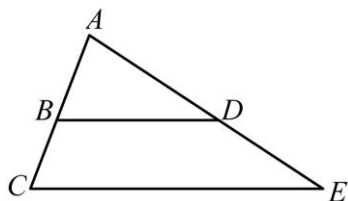
(1) $\overline{DE} : \overline{DF} =$ _____。

(2) $\overline{DE} =$ _____， $\overline{EF} =$ _____。

5. 已知 $L \parallel M \parallel N$ ，若 $\overline{DE} = 16$ ，
 $\overline{DF} = 28$ ，且 $\overline{AC} = 56$ ，



求 \overline{AB} 和 \overline{BC} 。



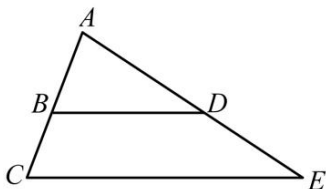
(1) 如果 $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$,

$$\text{則 } \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE}$$

(2) 如果 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{DE}$

$$\text{則 } \overline{BD} \parallel \overline{CE}$$

〈例〉



如果 $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = 3$,

$$\overline{AC} = 3$$
 , $\overline{AE} = 4.5$

請問： \overline{BD} 和 \overline{CE} 是否平行？

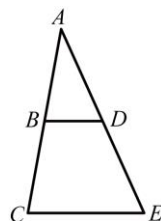
☆筆記

(1) 如果 $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$,

$$\text{則 } \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CE}$$

(2) 如果 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CE}$

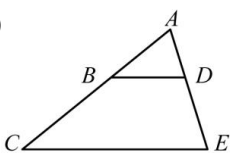
\overline{BD} 和 \overline{CE} 會平行？



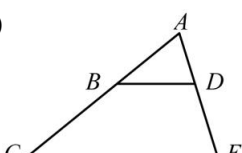
整理

若 $\overline{BD} \parallel \overline{CE} \Rightarrow$ 比例線段

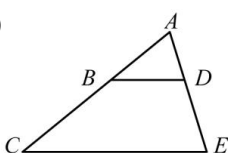
①



②



③



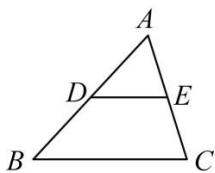
牛刀小試 8

1. $\triangle ABC$ 中 D 、 E 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的一點，

回答下列問題：

(1) 若 $\overline{AD} = 4$, $\overline{BD} = 6$, $\overline{AE} = 6$, $\overline{EC} = 9$,

則 \overline{DE} 和 \overline{BC} 是否平行？



(2) 若 $\overline{AD} = 15$, $\overline{AB} = 27$, $\overline{AE} = 20$,

$\overline{AC} = 35$, 則 \overline{DE} 和 \overline{BC} 是否平行？

(3) 若 $\overline{AD} = 6$, $\overline{AB} = 14$, $\overline{DE} = 9$,

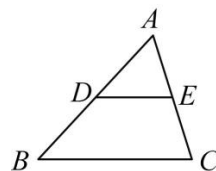
$\overline{BC} = 21$, 則 \overline{DE} 和 \overline{BC} 是否平行？

2. $\triangle ABC$ 中 D 、 E 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的一

點，若要使得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, 回答下列問題：

(1) 若 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$, $\overline{EC} = 6$, 則

$\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$, 才能使得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

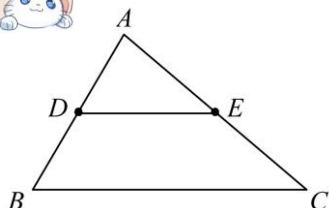


(2) 若 $\overline{AD} : \overline{AB} = 4 : 9$, $\overline{AC} = 27$, 則

$\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$, 才能使得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。

(3) 若 $\overline{AB} : \overline{DB} = 8 : 3$, $\overline{AC} = 32$, 則

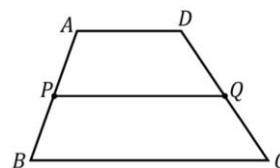
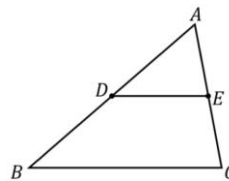
$\overline{EC} = \underline{\hspace{2cm}}$, 才能使得 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。



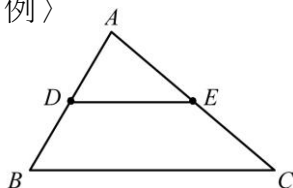
☆ 在 $\triangle ABC$ 中,如果 D 是 AB 中點, E 是 AC 中點, \overline{DE} 稱為_____。

說明: (1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

☆筆記



〈例〉



已知: $\overline{AD} = \overline{DB}$, $\overline{AE} = \overline{EC}$,
 $\angle ADE = 57^\circ$, $\overline{BC} = 10$

求: (1) $\angle B = ?$ (2) $\overline{DE} = ?$



牛刀小試 9

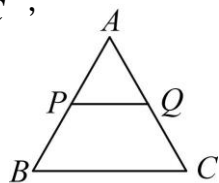
1. 已知 $\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AQ} = \overline{QC}$,

$\angle APQ = 55^\circ$, $\overline{BC} = 12$

(1) $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ 是否平行?

(2) $\angle ABC =$ _____

(3) $\overline{PQ} =$ _____



3. 已知 D 和 E 是 \overline{AB} 和 AC 中點,

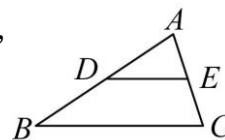
若 $\angle AED = 72^\circ$, $\overline{AD} = 6$,

$\overline{DE} = 10$, 求

(1) $\angle ACB =$ _____

(2) $\overline{AB} =$ _____

(3) $\overline{BC} =$ _____



2. 已知 D 和 E 是 \overline{AB} 和 AC 中點,

若 $\angle ADE = 32^\circ$, $\overline{AB} = 12$,

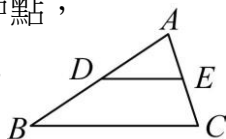
$\overline{BC} = 18$, 求

(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 是否平行?

(2) $\angle ABC =$ _____

(3) $\overline{AD} =$ _____

(4) $\overline{DE} =$ _____



4. 已知 D 和 E 是 \overline{AB} 和 AC 中點,

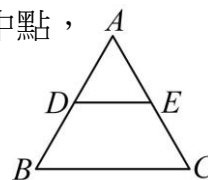
若 $\angle B = 75^\circ$, $\overline{AD} = 10$,

$\overline{DE} = 11$, 求

(1) $\angle ADE =$ _____

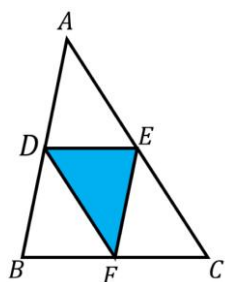
(2) $\overline{AB} =$ _____

(3) $\overline{BC} =$ _____





例題 ② 三角形兩邊中點連線性質

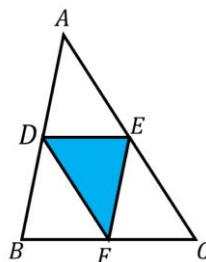


在 $\triangle ABC$ 中，如果 D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 中點。

已知： $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{AC} = 7$ ， $\overline{BC} = 5$

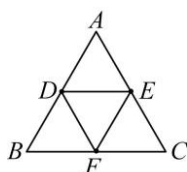
求： $\triangle DEF$ 周長＝？

☆筆記

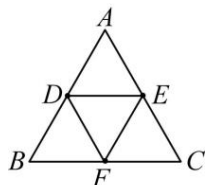


牛刀小試 10

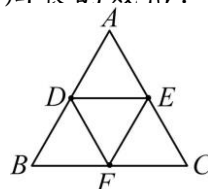
1. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 中點，已知 $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 9$ ，求(1) $\triangle ABC$ 周長
(2) $\triangle DEF$ 周長



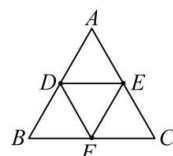
2. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 中點，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 10$ ，求(1) $\triangle ABC$ 周長
(2) $\triangle DEF$ 周長



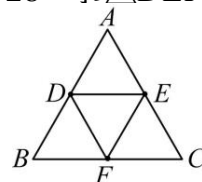
3. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 中點，若 $\overline{DE} = 4$ ， $\overline{DF} = 5$ ， $\overline{EF} = 6$ ，求(1) $\triangle DEF$ 周長 (2) $\triangle ABC$ 周長
(3) $\triangle DEF$ 周長是 $\triangle ABC$ 周長的幾倍？



4. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 中點，若 $\overline{DF} = 5$ ， $\overline{EF} = 6$ ， $\overline{DE} = 7$ ，求(1) $\triangle ABC$ 周長 (2) $\triangle ADE$ 周長
(3) $\triangle DEF$ 周長是 $\triangle ABC$ 周長的幾倍？

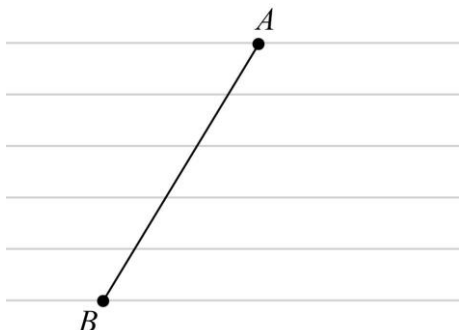


5. 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 中點，若 $\triangle ABC$ 周長是28，求 $\triangle DEF$ 周長。





如右圖姿廷買了一本印有等距離平行線的筆記本。請找出一點 C 使得 $\overline{AC} : \overline{CB} = 2 : 3$ ，說說看你是怎麼找出來的？

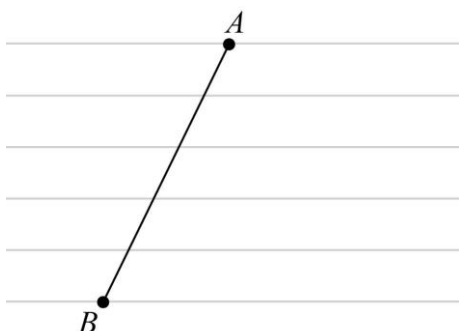


☆筆記

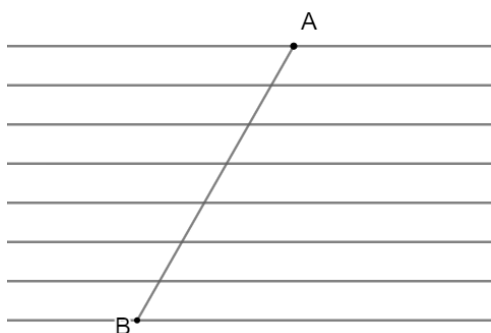


牛刀小試 11

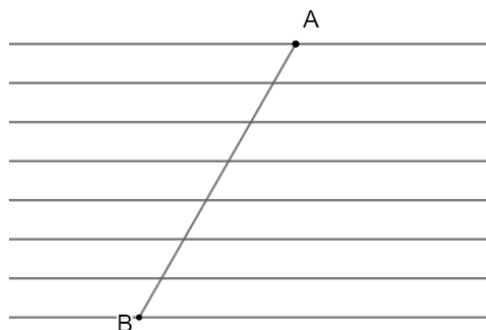
1. 如圖為一本印有等距離平行線的筆記本，請找出一點 D 使得 $\overline{AD} : \overline{BD} = 3 : 2$



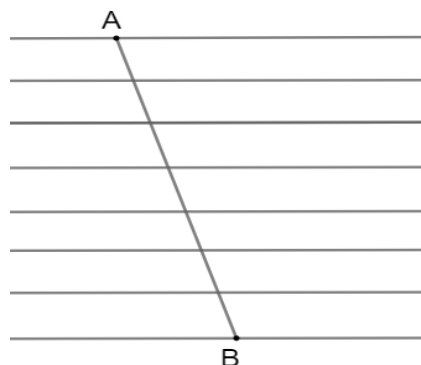
2. 如圖為一本印有等距離平行線的筆記本，請找出一點 C 使得 $\overline{AC} : \overline{BC} = 4 : 3$



3. 如圖為一本印有等距離平行線的筆記本，請找出一點 C 使得 $\overline{AC} : \overline{AB} = 4 : 7$



4. 如圖為一本印有等距離平行線的筆記本，請找出一點 M 使得 $\overline{AM} : \overline{AB} = 6 : 7$



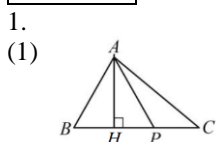


解 答 篇

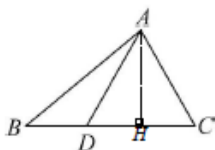
牛刀小試 1

- (1) 相等 (2) 3 : 2
- 因為 $\triangle DAC$ 面積和 $\triangle EAC$ 的底是 \overline{AC} 。
 $\triangle DAC$ 面積和 $\triangle EAC$ 的高相等
所以 $\triangle DAC$ 面積和 $\triangle EAC$ 面積相等
- 5 : 2
 - 4
- 15，因為底相同高相等(同底等高)，
所以
 $\triangle ABC$ 面積 = $\triangle DBC$ 面積，

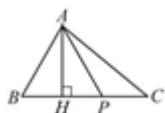
牛刀小試 2



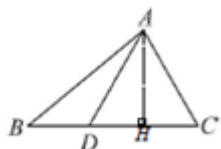
- 5 : 2
 - 5 : 7
 - 8



- 3 : 5
 - 3 : 8
 - 15



- 4 : 3
 - 15



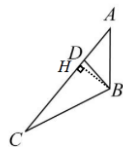
- 4 : 11
 - 12

牛刀小試 3

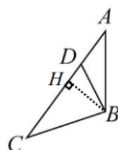
- $\triangle ADE$ 面積 = $\triangle BFG$ 面積 = $\triangle CHI$ 面積
- $\triangle ADE$ 面積 = $\triangle BDE$ 面積 =

$\triangle CDE$ 面積

- 10, 10
- 3 : 4
 - 3 : 7



- 1 : 5
 - 1 : 6
 - 5



牛刀小試 4

- 1 : 4
 - 24
- 2 : 3
 - 9
- 1 : 4
 - 16
- 2 : 3
 - 12

牛刀小試 5

- 1 : 5
 - 25
- 1 : 2
 - 10
- 4 : 5
 - 15
- 5 : 7
 - 70

牛刀小試 6

- 1 : 5
 - 45
- 3 : 7
 - 14
- 1 : 4

- 16
- 1 : 4
- 20
- 3 : 7
 - 63
 - 3 : 7
 - 56

牛刀小試 7

- 3 : 5
 - $\frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}} = 9$
 $\frac{\overline{QC}}{\overline{QC}} = 15$

- 3 : 7
 - $\frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}} = 21$
 $\frac{\overline{QC}}{\overline{QC}} = 28$

- 7 : 11
 - $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = 28$
 $\frac{\overline{EF}}{\overline{EF}} = 16$

- 3 : 8
 - $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = 18$
 $\frac{\overline{EF}}{\overline{EF}} = 30$
- $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 32$
 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}} = 24$

牛刀小試 8

- 是
 - 否
 - 否

- 9
 - 12
 - 12

牛刀小試 9

- 是
 - 55°
 - 6
- 是
 - 32°
 - 6
 - 9
- 72°

- (2) 12
 (3) 20
 4.
 (1) 75°
 (2) 20
 (3) 22

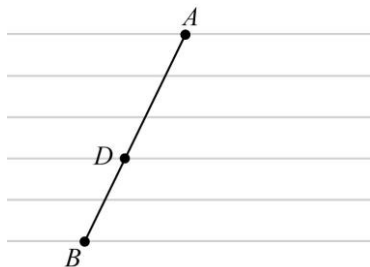
牛刀小試 10

1.
 (1) 24
 (2) 12
 2.
 (1) 26
 (2) 13
 3.
 (1) 15
 (2) 30
 (3) $\frac{1}{2}$

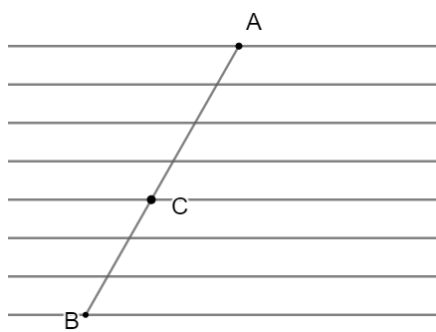
4.
 (1) 36
 (2) 18
 (3) $\frac{1}{2}$
 5. 14

牛刀小試 11

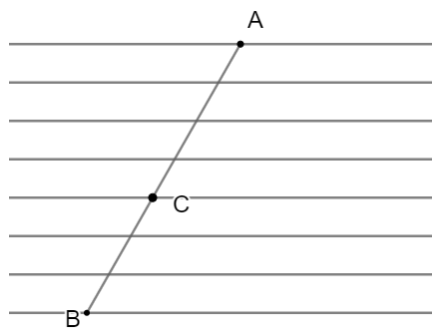
1.



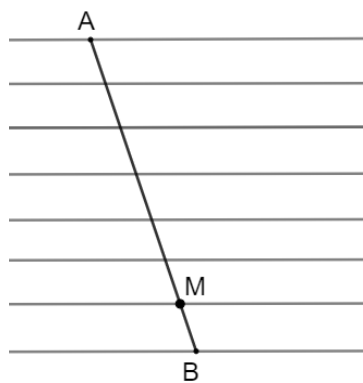
2.



3.



4.





B5 1-3 相似形



概念 ① 縮放圖形



☆ 在國小的時候，我們學過利用縮放的方法，將一張圖片放大（或縮小）成與原來形狀相同的新圖片。大小可能不同，但是形狀相同，我們稱為_____，也叫做_____。

☆ 舉例

☆ 筆記

① 縮放圖形就是_____。

② 圖形縮放後會重疊在一起就是_____。

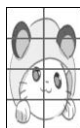


牛刀小試 1

1. 判斷下列圖形中，哪一個才是左圖照片的縮放圖形？



(A)



寬放大 2 倍

(B)



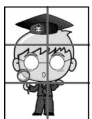
長放大 2 倍

(C)



長寬都放大 2 倍
角度不變

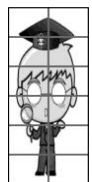
2. 判斷下列圖形中，哪一個才是左圖照片的縮放圖形？



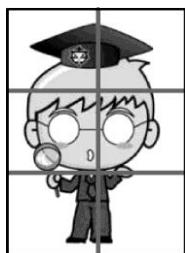
(A)



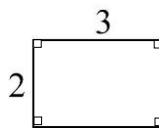
(B)



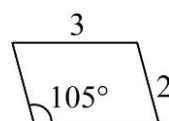
(C)



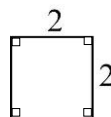
3. 判斷下列圖形中，哪一個選項是左圖長方形的縮放圖形？



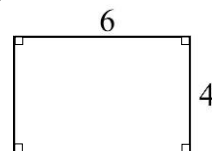
(A)



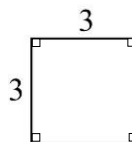
(B)



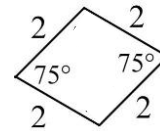
(C)



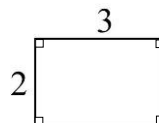
4. 判斷下列圖形中，哪一個選項是左圖正方形的縮放圖形？



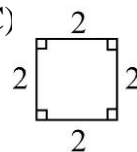
(A)



(B)



(C)



發現：角度一變，形狀就不相同。

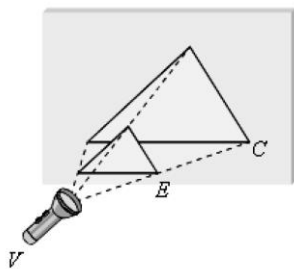


概念

② 線段的縮放

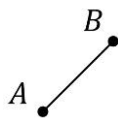


☆ 縮放中心和縮放倍率



☆ 線段的縮放

請把 \overline{AB} 放大為原來的2倍



☆ 筆記

在影印機

① 按下200%

表示_____

② 按下50%

表示_____

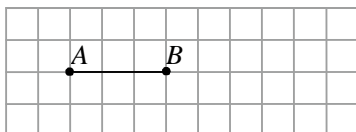


① 縮放中心：_____。 ② 縮放倍率：_____。

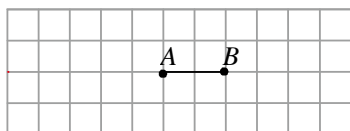


牛刀小試 2

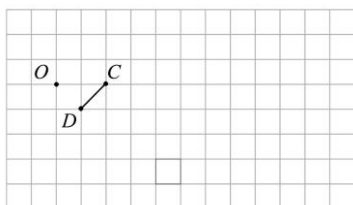
1. (1) 畫出以 A 點為縮放中心，將 \overline{AB} 放大3倍的線段 $\overline{AB'}$ 。



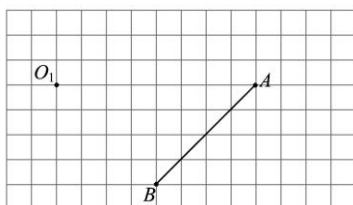
- (2) 畫出以 B 點為縮放中心，將 \overline{AB} 放大3倍的線段 $\overline{A'B}$ 。



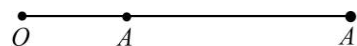
2. (1) 畫出以 O 點為縮放中心，將 \overline{CD} 放大3倍的線段 $\overline{C'D'}$ 。



- (2) 畫出以 O 點為縮放中心，將 \overline{AB} 縮小為 $\frac{1}{4}$ 倍的線段 $\overline{A'B'}$ 。

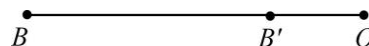


3. 如圖， O 、 A 、 A' 三點在同一條直線上，若 $\overline{OA'} : \overline{OA} = 3 : 1$ ，則



- (1) $\overline{OA'}$ 是 \overline{OA} 的_____倍縮放圖形。
(2) 若 $\overline{OA} = 3$ ， $\overline{OA'} =$ _____

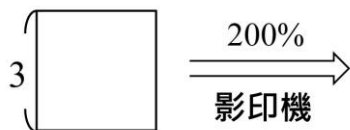
4. 如圖， O 、 B 、 B' 三點在同一條直線上，若 $\overline{OB'} = 3$ ， $\overline{BB'} = 12$ ，則



- (1) $\overline{OB'} : \overline{OB} =$ _____
(2) $\overline{OB'}$ 是 \overline{OB} 的_____倍縮放圖形。



☆如果把一個邊長3公分的正方形放進影印機中按下200%之後，請問：影印出來的結果會如何？



☆圖形經過縮放之後，角度_____。
長度_____。

☆筆記

如果將一個邊長10公分的正三角形放入影印機中按下50%，結果會如何？



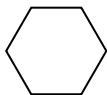
牛刀小試 3

1. 若將一個邊長4公分的正方形放進影印機按下150%，請問：



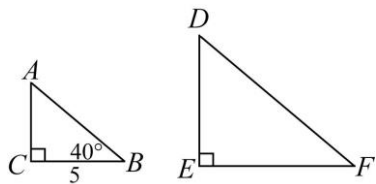
- (1) 150%表示縮放_____倍
(2) 縮放後的邊長為_____公分，
一個內角為_____度。

2. 若將一個邊長為5公分的正六邊形放進影印機按下80%，請問：



- (1) 80%表示縮放_____倍
(2) 縮放後的邊長為_____公分，
一個內角為_____度。

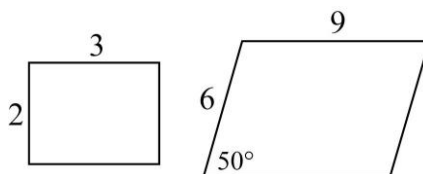
3. 將直角 $\triangle ABC$ 縮放300%後得到 $\triangle DEF$ ，其中A、B、C的對應點分別為D、E、F，若 $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=40^\circ$ ， $\overline{BC}=5$ ，



- (1) 300%表示縮放_____倍。
(2) $\angle E=_____$ ， $\angle F=_____$ ，
 $\overline{EF}=_____$ 。

4. 判斷下列是不是縮放圖形，若是，請說明是幾倍縮放圖形，若不是，請說明原因。

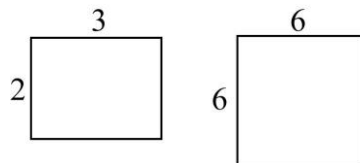
(1)



☐是，_____倍縮放圖形

☐不是，原因：_____

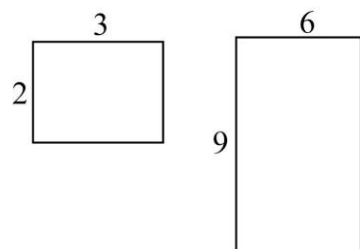
(2)



☐是，_____倍縮放圖形

☐不是，原因：_____

(3)

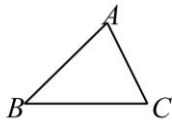
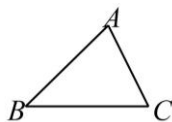
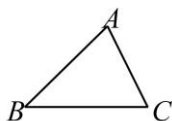
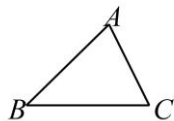


☐是，_____倍縮放圖形

☐不是，原因：_____



☆請畫出 $\triangle ABC$ 縮放為2倍的圖形

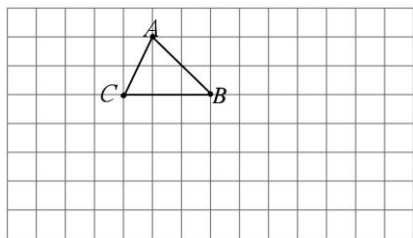


☆筆記

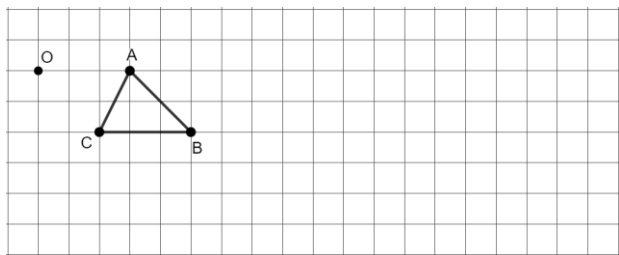


牛刀小試 4

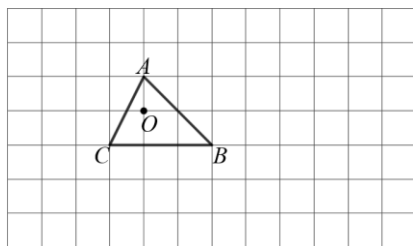
1. (1) 畫出以 A 點為縮放中心，將 $\triangle ABC$ 放大3倍後的圖形 $\triangle AB'C'$ 。



- (2) 畫出以 O 點為縮放中心，將 $\triangle ABC$ 放大3倍後的圖形 $\triangle A'B'C'$ 。



- (3) 畫出以 O 點為縮放中心，將 $\triangle ABC$ 放大3倍後的圖形 $\triangle A'B'C'$ 。

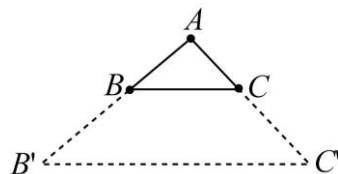


4. 如圖， $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 以 A 點為中心的縮放圖形，若 $\overline{AB} : \overline{AB'} = 1 : 3$ ，
 $\overline{AC} : \overline{AC'} = 1 : 3$ ，則：

(1) $\overline{BC} : \overline{B'C'} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (2) $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的_____倍縮放圖形

(3) 若 $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{B'C'} = \underline{\hspace{2cm}}$

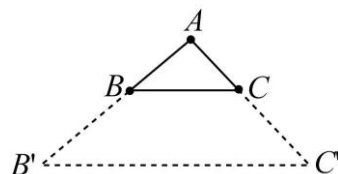


5. 如圖， $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 以 A 點為中心的縮放圖形，若 $\overline{AB} : \overline{AB'} = 1 : 2$ ，
 $\overline{AC} : \overline{AC'} = 1 : 2$ ，則：

(1) $\overline{BC} : \overline{B'C'} = \underline{\hspace{2cm}}$

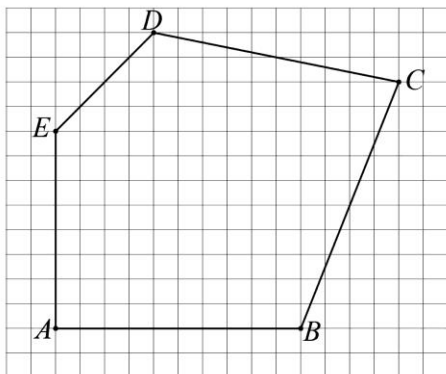
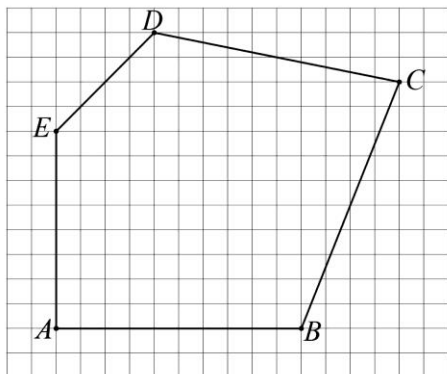
- (2) $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的_____倍縮放圖形

(3) 若 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{B'C'} = \underline{\hspace{2cm}}$





☆請畫出五邊形 $ABCDE$ 縮放為 $\frac{1}{2}$ 倍的圖形

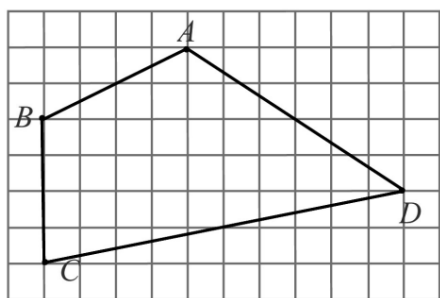


☆筆記

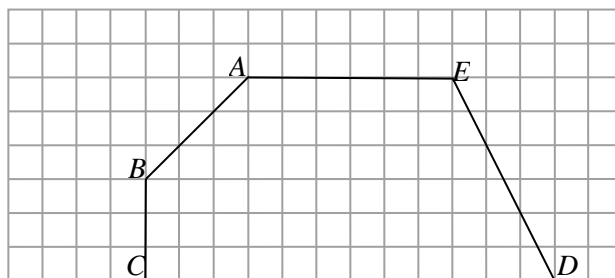


牛刀小試 5

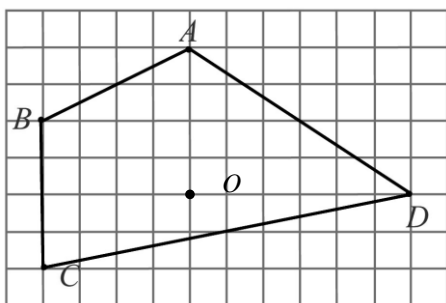
1. (1) 畫出以 A 點為縮放中心，將四邊形 $ABCD$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的四邊形 $AB'C'D'$ 。



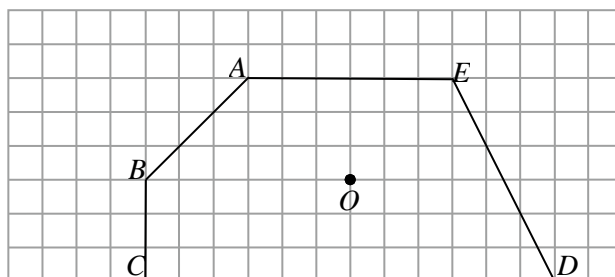
2. (1) 畫出以 A 點為縮放中心，將五邊形 $ABCDE$ 縮放 $\frac{1}{3}$ 倍後的五邊形 $AB'C'D'E'$ 。



- (2) 畫出以 O 點為縮放中心，將四邊形 $ABCD$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的四邊形 $A'B'C'D'$ 。



- (2) 畫出以 O 點為縮放中心，將五邊形 $ABCDE$ 縮放 $\frac{1}{3}$ 倍後的五邊形 $A'B'C'D'E'$ 。





例題 1 縮放圖形求角度和長度

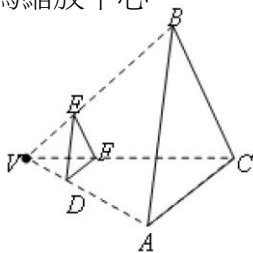


如圖， $\triangle ABC$ 是 $\triangle DEF$ 縮放為 3 倍的圖形， V 為縮放中心

若 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 55^\circ$ ， $\overline{DE} = 3$ ，

求 $\angle D =$ _____ 度， $\angle E =$ _____ 度，

$\angle DFE =$ _____ 度， $\overline{AB} =$ _____。



☆筆記



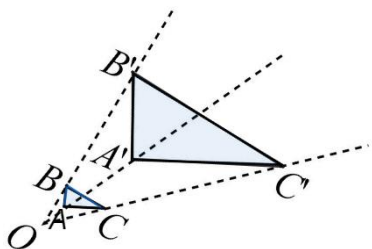
牛刀小試 6

1. 如圖， O 為 $\triangle ABC$ 外部一點。若 $\triangle A'B'C'$ 是以 O 為中心，將 $\triangle ABC$ 放大 4 倍後的縮放圖形。若 $\angle A = 90^\circ$ 、 $\angle B = 60^\circ$ ， $\overline{BC} = 3$ 則：

(1) $\overline{OB'} : \overline{OB} =$ _____。

(2) $\overline{B'C'} =$ _____。

(3) $\angle A' =$ _____， $\angle C' =$ _____。



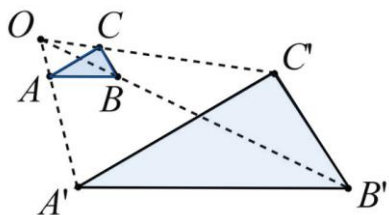
2. 如圖， $\triangle A'B'C'$ 是以 O 點為縮放中心，將 $\triangle ABC$ 放大後的圖形， $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 5$ 、 $\overline{A'B'} = 24$ 、 $\angle CAB = 30^\circ$ ，求：

(1) $\overline{A'B'} : \overline{AB} =$ _____。

(2) $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ _____ 倍的縮放圖形

(3) $\overline{A'C'} =$ _____。

(4) $\angle C'A'B' =$ _____。



3. 如圖， O 為 $\triangle ABC$ 外部一點。若 $\triangle A'B'C'$ 是以 O 為中心，將 $\triangle ABC$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍後的縮放圖形。若 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AC} = 7$ ，

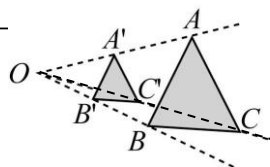
$\angle ABC = 70^\circ$ ， $\angle C'A'B' = 50^\circ$ ，則

(1) $\overline{OA'} : \overline{OA} =$ _____。

(2) $\overline{A'C'} : \overline{AC} =$ _____。

(3) $\overline{A'B'} =$ _____。

(4) $\angle A'C'B' =$ _____。



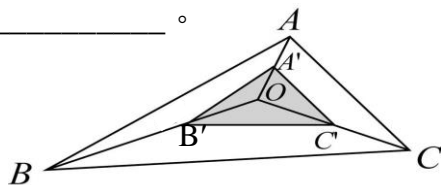
4. 如圖， O 為 $\triangle ABC$ 內部一點。若 $\triangle A'B'C'$ 是以 O 為中心，將 $\triangle ABC$ 縮小 $\frac{1}{2}$ 後的縮放圖形。若 $\overline{AB} = 10$ 、 $\overline{AC} = 6$ ， $\angle ABC = 40^\circ$ ， $\angle CAB = 85^\circ$ ，則：

(1) $\overline{OC'} : \overline{OC} =$ _____。

(2) $\overline{A'C'} : \overline{AC} =$ _____。

(3) $\overline{A'B'} =$ _____。

(4) $\angle A'C'B' =$ _____。





☆當一個圖形甲經過縮放可以得到新的圖形乙。

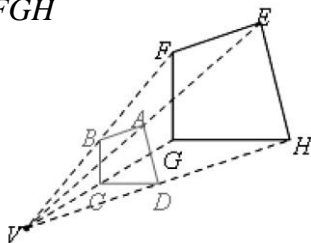
它的形狀不變，只是大小改變，我們說甲和乙是_____，
也叫做_____，符號：_____（唸成_____）

☆如右圖，我們把四邊形 $ABCD$ 放大為2倍，得到四邊形 $EFGH$

我們說：四邊形 $ABCD$ 四邊形 $EFGH$

其中①對應角：_____

②對應邊：_____



發現

相似多邊形 \Rightarrow

① _____

② _____

☆筆記

①縮放圖形 \Rightarrow _____

②縮放後會重疊在一起（全等）
 \Rightarrow _____

③全等是不是相似？

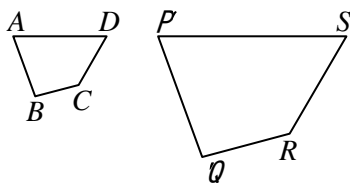
④ $ABCD \sim EFGH$

A 的對應點一定是 E 嗎？



牛刀小試 7

1. 已知四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ，其中 A 、 B 、 C 、 D 的對應頂點分別為 P 、 Q 、 R 、 S ，則：



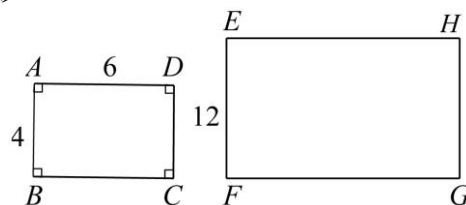
(1) $\angle A$ 的對應角是_____。

$\angle Q$ 的對應角是_____。

(2) \overline{DC} 的對應邊是_____。

\overline{PS} 的對應邊是_____。

2. 如圖，將長方形 $ABCD$ 放大為3倍，得到長方形 $EFGH$



(1) 我們說

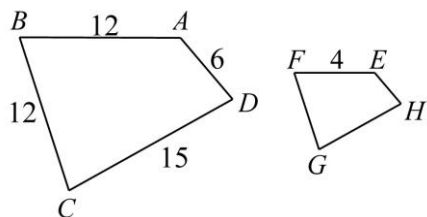
長方形 $ABCD$ 長方形 $EFGH$

(2) $\overline{AB} : \overline{EF} =$ _____。

(3) 若 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{EH} =$ _____。

(4) $\angle E =$ _____。

3. 如圖，四邊形 $EFGH$ 是四邊形 $ABCD$ 的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖，



(1) 我們說

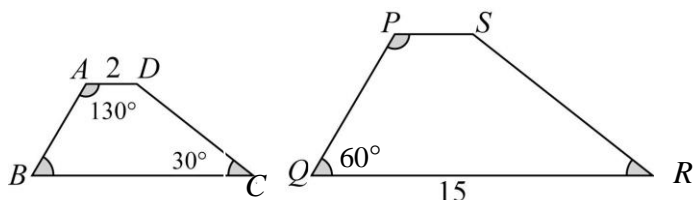
四邊形 $EFGH$ 四邊形 $ABCD$

(2) $\overline{AB} : \overline{EF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\overline{EH} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{GH} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 若 $\angle BCD = 70^\circ$ ，則 $\angle FGH = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 如圖，四邊形 $PQRS \sim$ 四邊形 $ABCD$ 且 $A、B、C、D$ 四點的對應點分別為 $P、Q、R、S$ ，且 $\overline{AB} : \overline{PQ} = 1 : 3$



(1) 因為四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ，

且 $\overline{AB} : \overline{PQ} = 1 : 3$

所以四邊形 $PQRS$ 是四邊形 $ABCD$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍縮放圖形。

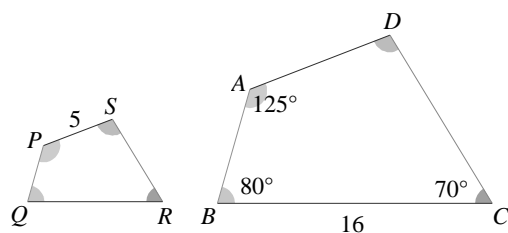
(2) \overline{AD} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

\overline{QR} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\angle R = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle S = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 如圖，四邊形 $PQRS \sim$ 四邊形 $ABCD$ 且 $A、B、C、D$ 四點的對應點分別為 $P、Q、R、S$ ，且 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$



(1) 因為四邊形 $PQRS \sim$ 四邊形 $ABCD$ ，

且 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$ ，我們說

四邊形 $PQRS$ 是四邊形 $ABCD$ $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍的縮放圖形。

(2) \overline{BC} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

\overline{PS} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

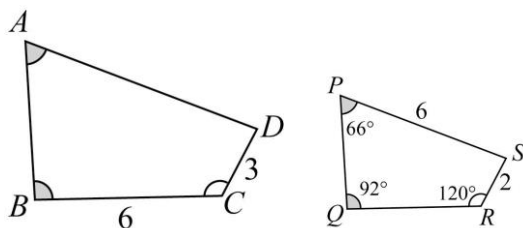
(3) $\angle Q = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle S = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 如圖，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $PQRS$ ，且 $A、B、C、D$ 四點的對應點分別為 $P、Q、R、S$ ，若 $\angle P = 66^\circ$ 、 $\angle Q = 92^\circ$ 、 $\angle R = 120^\circ$ ，則：

(1) $\overline{DC} : \overline{SR} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle D = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{QR} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。





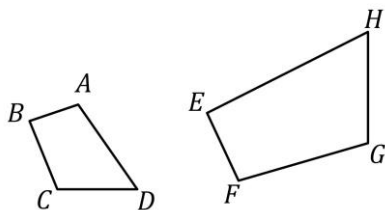
例題 2 相似多邊形對應角相等對應邊成比例



已知：四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ ， A 、 B 、 C 、 D 的對應點分別為 E 、 F 、 G 、 H

(1) 若 $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle C = 110^\circ$ ， $\angle D = 68^\circ$ ，求 $\angle E$ 的度數？

(2) 若 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{EF} = 4$ ，求 $\overline{FE} = ?$



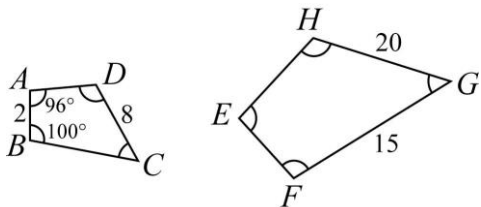
☆筆記



牛刀小試 8

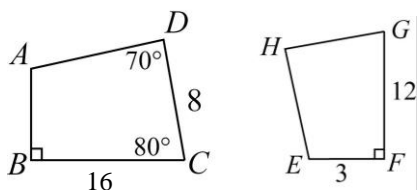
1. 如圖，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ ，且 A 、 B 、 C 、 D 四點的對應點分別為 E 、 F 、 G 、 H ，

- (1) $\overline{CD} : \overline{GH} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(最簡整數比)
- (2) \overline{AB} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
 \overline{FG} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) $\angle A$ 的對應角是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其度數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



2. 如圖，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ ，且 A 、 B 、 C 、 D 四點的對應點分別為 E 、 F 、 G 、 H 。

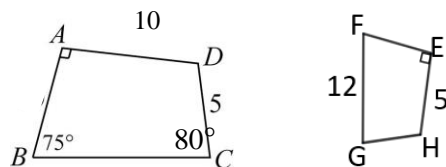
- (1) $\overline{BC} : \overline{GF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(最簡整數比)
- (2) \overline{CD} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
 \overline{EF} 的對應邊是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) $\angle A$ 的對應角是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，其度數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



3. 如圖，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ 且 A 、 B 、 C 、 D 四點的對應點分別為 E 、 F 、 G 、 H 。若 $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle B = 75^\circ$ ， $\angle C = 80^\circ$ ，則：

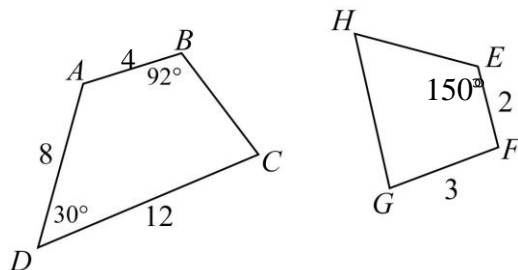
$\angle C = 80^\circ$ ，則：

- (1) $\overline{AD} : \overline{EH} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{GH} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) $\angle H = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



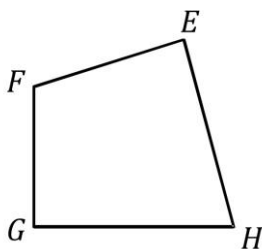
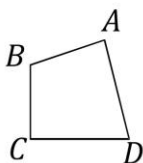
4. 如圖，四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $EFGH$ 且 A 、 B 、 C 、 D 四點的對應點分別為 E 、 F 、 G 、 H 。若 $\angle D = 30^\circ$ ， $\angle B = 92^\circ$ ，則

- (1) $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (2) $\angle G = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
- (3) 四邊形 $EFGH$ 周長 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。





☆如何判別四邊形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 是否相似？



☆筆記

縮放後會重疊在一起

⇒ _____



整理

① _____ ⇒ 相似多邊形

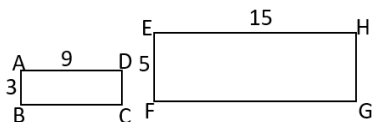
② _____



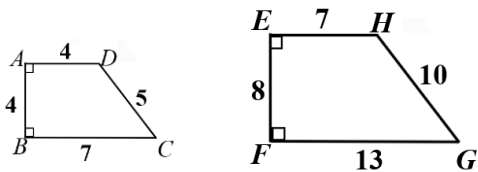
牛刀小試 9

1. 判斷下列兩個四邊形是否相似，若不是相似圖形，請說明理由。

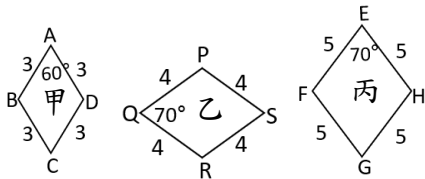
(1) 如圖，長方形 $ABCD$ 與長方形 $EFGH$ 是否相似？



(2) 如圖，梯形 $ABCD$ 與梯形 $EFGH$ 是否相似？

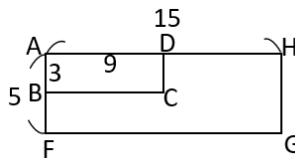


(3) 如圖，下列哪兩個菱形是相似圖形？

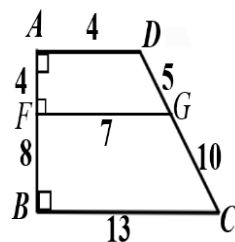


2. 判斷下列兩個四邊形是否相似？

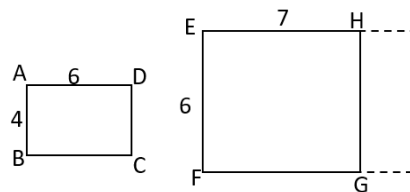
(1) 長方形 $ABCD$ 與長方形 $AFGH$ 是否相似？(可參考左下圖)



(2) 梯形 $AFGD$ 與梯形 $FBCG$ 是否相似？(可參考右圖)



(3) 如圖，長方形 $ABCD$ 與長方形 $EFGH$ 是否相似？若不相似，請問 \overline{EH} 要增加多少公分才會和四邊形 $ABCD$ 相似？





例題 ③ 四邊形的相似



(1) 長方形和正方形是否相似？

(2) 菱形和正方形是否相似？

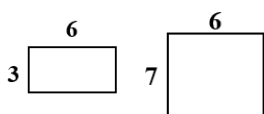
☆筆記

新台幣 100 元紙鈔和 1000 元紙鈔是否相似？



牛刀小試 10

1. 請依照題意畫出下列圖形，並給予適當長度和角度，判斷下列四邊形是不是相似形，是請打「✓」，不是請打「×」

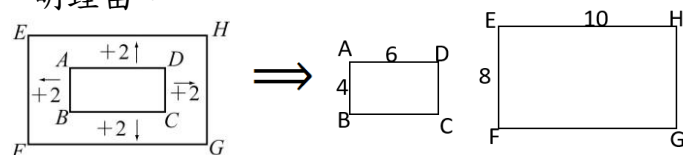
(1) 圖形	對應角相等	對應邊成比例	兩個圖形相似
兩個長方形 			
兩個平行四邊形			
兩個菱形			

(2) 圖形	對應角相等	對應邊成比例	兩個圖形相似
兩個直角三角形			
兩個等腰三角形			
兩個等腰直角三角形			

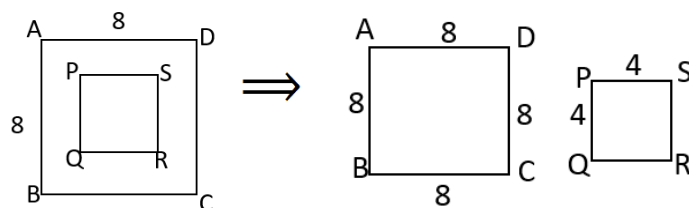
(3)圖形	對應角相等	對應邊成比例	兩個圖形相似
兩個正三角形			
兩個正方形			
兩個正六邊形			
兩個圓形			
發現: 什麼圖形一定是相似形?			

2. 如圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} = 6$ 公分，

$\overline{AB} = 4$ 公分，將長方形 $ABCD$ 各邊往外加 2 公分，得一長方形 $EFGH$ ，則長方形 $ABCD$ 和長方形 $EFGH$ 是否相似？請說明理由。



3. 如圖，正方形 $ABCD$ 中，邊長是 8，將正方形各邊往內皆減 2 後，得一較小的正方形 $PQRS$ ，則正方形 $ABCD$ 與正方形 $PQRS$ 是否相似？請說明理由。



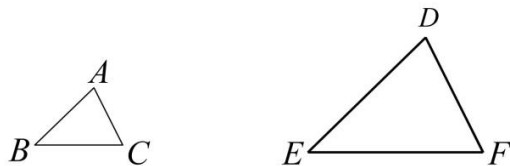


☆多邊形的相似判別：①_____而且②_____

☆放大後會重疊在一起 \Rightarrow _____

☆若 $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C = \angle F$ ，

請問： $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



整理

兩個 \triangle 有 3 個角對應相等 \Rightarrow _____

☆筆記

兩個 \triangle 有 2 個角對應相等，
會相似嗎？

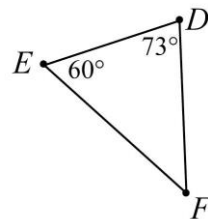
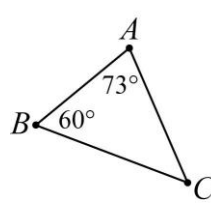


牛刀小試 11

1. 各題中的兩個三角形是否相似，如果相似是根據哪一個相似性質？

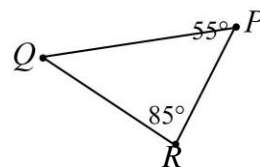
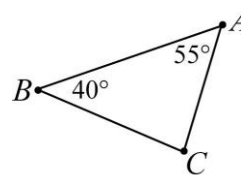
(1) ☐ $\triangle ABC \sim \triangle$ _____ (根據_____相似性質)

☐ 兩個圖形不相似

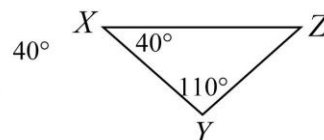
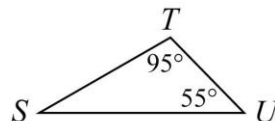
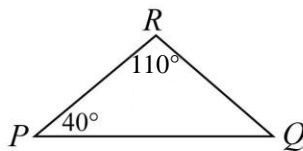
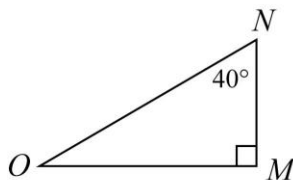
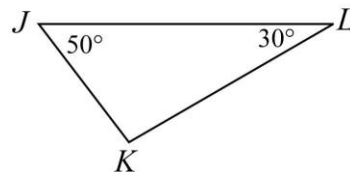
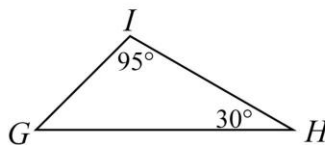
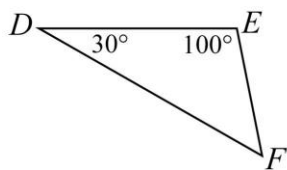
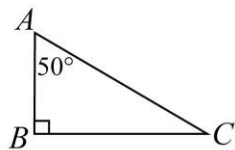


(2) ☐ $\triangle ABC \sim \triangle$ _____ (根據_____相似性質)

☐ 兩個圖形不相似



2. 依照對應點寫出相似的三角形(提示:先把 \triangle 每個角寫出來)



(1) $\triangle ABC \sim \triangle$ _____

(2) $\triangle DEF \sim \triangle$ _____

(3) $\triangle GHI \sim \triangle$ _____

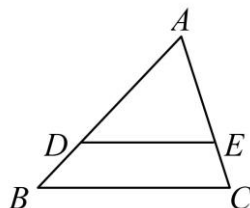
(4) $\triangle PQR \sim \triangle$ _____



例題 4 AAA 相似 (AA 相似) 練習

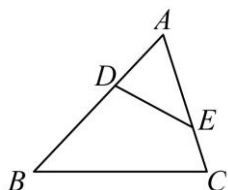


(1)



若 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 是否相似？

(2)



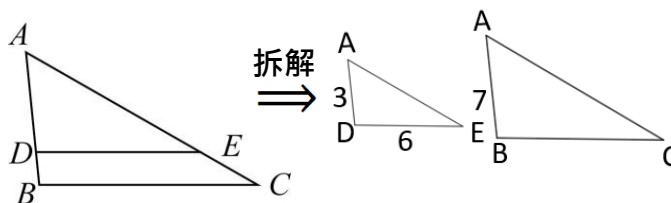
若 $\angle AED = \angle B$ ，則 $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 是否相似？

☆筆記



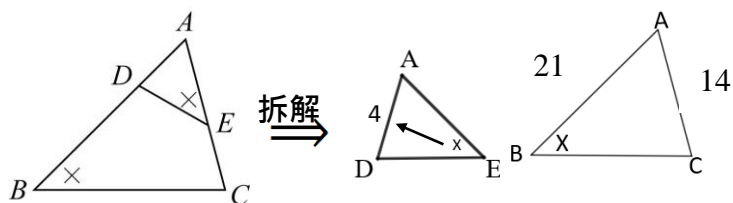
牛刀小試 12

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上的點， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{DE} = 6$ 且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，



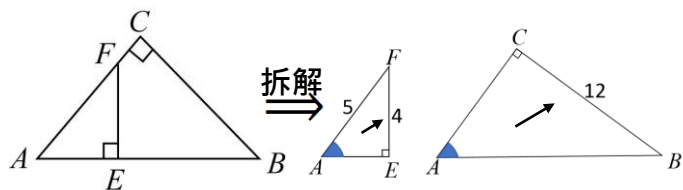
- (1) $\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 是否相似？
根據什麼相似性質？
- (2) \overline{AD} 的對應邊是 _____
- (3) $\overline{AD} : \overline{AB} =$ _____
- (4) \overline{DE} 的對應邊 _____，其長度為 _____

2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，若 $\angle B = \angle AED$ ，則



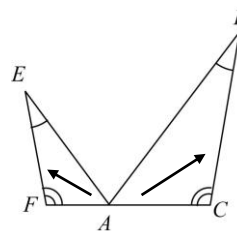
- (1) $\triangle ABC$ 與 $\triangle AED$ 是否相似？
根據什麼相似性質？
- (2) 若 $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{AB} = 21$ ， $\overline{AC} = 14$ ，
 \overline{AD} 的對應邊是 _____，
- (3) $\overline{AD} : \overline{AC} =$ _____，
- (4) \overline{AB} 的對應邊是 _____，其長度為 _____

3. 如圖， $\triangle ABC$ 中， E 、 F 兩點分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，若 $\angle C = \angle AEF = 90^\circ$ ，則



- (1) $\triangle ACB$ 與 $\triangle AEF$ 是否相似？
根據什麼相似性質？
- (2) 若 $\overline{EF} = 4$ ， $\overline{AF} = 5$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則
 \overline{EF} 的對應邊是_____，
- (3) $\overline{EF} : \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
- (4) \overline{AE} 的對應邊_____，其長度是_____

4. 右圖 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中，已知 $\angle B = \angle E$ ， $\angle C = \angle F$ ，且 $\overline{BC} = 36$ ， $\overline{EF} = 24$ ， $\overline{AF} = 8$ ，



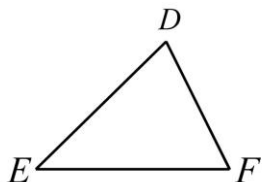
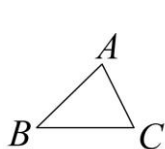
- (1) $\triangle ABC$ 與 $\triangle AEF$ 是否相似？
根據什麼相似性質？
- (2) \overline{BC} 的對應邊是_____，
 $\overline{EF} : \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$
- (3) 求 $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$



☆多邊形的相似判別：①_____而且②_____

☆放大後會重疊在一起 \Rightarrow _____

☆若若 \overline{DE} 是 \overline{AB} 的2倍， \overline{EF} 是 \overline{BC} 的2倍， \overline{DF} 是 \overline{AC} 的2倍
請問：那麼 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



整理

如果一個三角形的3個邊都是另一個三角形3個邊的K倍
 \Rightarrow _____ \Rightarrow _____

☆筆記



牛刀小試 13

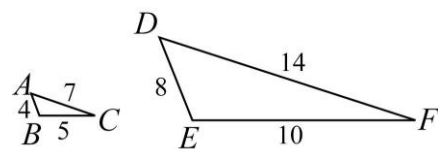
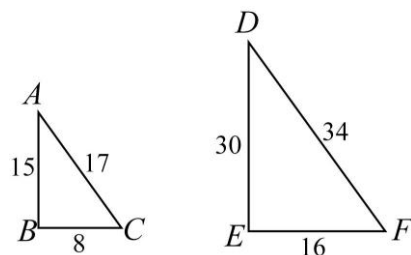
1. 若 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ 其邊長如圖所示，則這兩個三角形是否相似？是根據什麼相似性質？

(1) ☐ $\triangle ABC \sim \triangle$ _____ (根據_____相似性質)

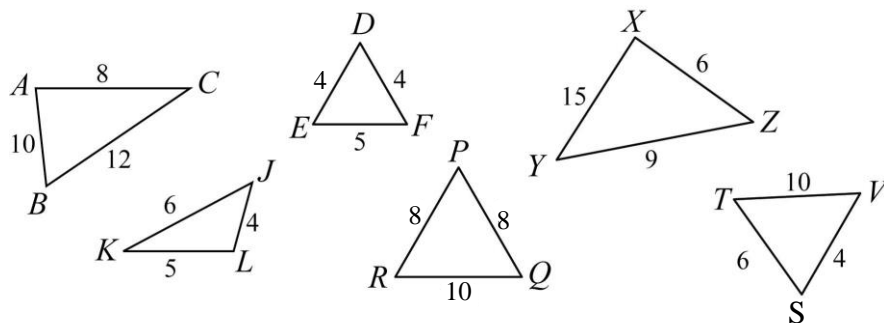
☐ 兩個圖形不相似

(2) ☐ $\triangle ABC \sim \triangle$ _____ (根據_____相似性質)

☐ 兩個圖形不相似



2. 依照對應點分別寫出相似的三角形(提示:寫出 \triangle 三個邊的最簡整數連比)



(1) $\triangle ABC \sim \triangle$ _____

(2) $\triangle DEF \sim \triangle$ _____

(3) $\triangle XYZ \sim \triangle$ _____



例題 5 SSS 相似練習



若三角形的三邊長分別為 10、20、15，
另一個三角形的三邊長分別為 14、28、21，
請問：這兩個三角形是否相似？

☆筆記

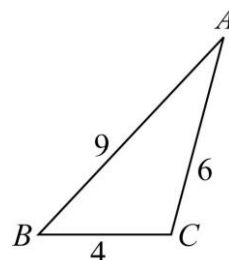


牛刀小試 14

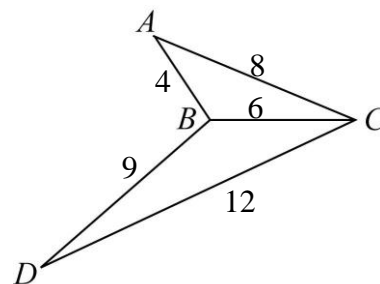
1. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\overline{AB} = 2\overline{DE}$ ，
 $\overline{BC} = 2\overline{EF}$ ， $\overline{AC} = 2\overline{DF}$ ，則這兩個三
角形是否相似？根據什麼相似性質？

2. 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，若 $\overline{AB} = \frac{1}{3}\overline{DE}$ ，
 $\overline{BC} = \frac{1}{3}\overline{EF}$ ， $\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{DF}$ ，則這兩個
三角形是否相似？根據什麼相似性質？

3. 下列各選項分別代表三角形的三邊長，
試問哪一個會和右圖的三角形相似？
(A) 2、3、4 (B) 5、10、6
(C) 3、4、5 (D) 2、4.5、3
(提示：寫出 \triangle 三個邊的最簡整數比)



4. 如圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle BDC$ 中， $\overline{AB} = 4$ ，
 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BD} = 9$ ， $\overline{CD} =$
12，則這兩個三角形是否相似？根據什
麼相似性質？



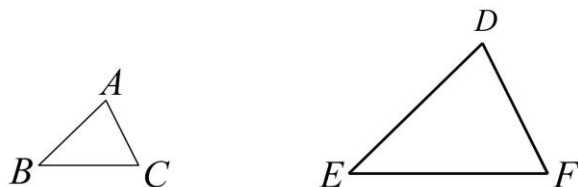


☆多邊形的相似判別：①_____而且②_____

☆放大後會重疊在一起⇒_____

若 $\angle A = \angle D$ ， $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{DF}$

請問：那麼 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否相似？



整理

兩個三角形有兩個邊成比例，而且它們的夾角相等

⇒_____

☆筆記

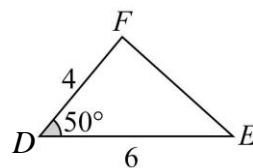
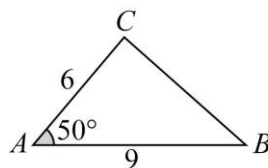


牛刀小試 15

1. 下圖中這兩個三角形是否相似？如果相似是根據什麼相似性質？

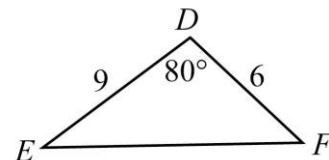
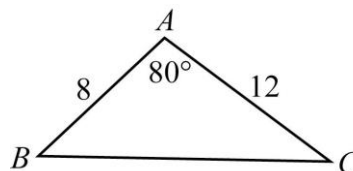
(1) ☐ $\triangle ABC \sim \triangle$ _____（根據_____相似性質）

☐ 兩個圖形不相似

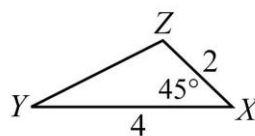
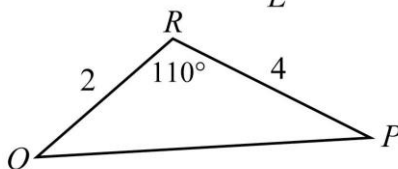
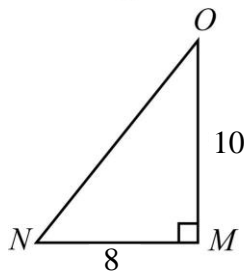
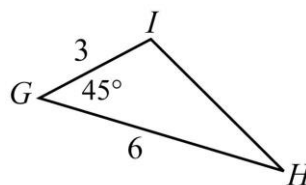
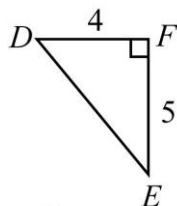
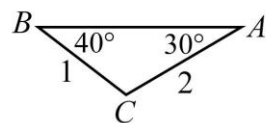


(2) ☐ $\triangle ABC \sim \triangle$ _____（根據_____相似性質）

☐ 兩個圖形不相似



2. 依照對應點分別寫出相似的三角形



(1) $\triangle CAB \sim \triangle$ _____

(2) $\triangle FED \sim \triangle$ _____

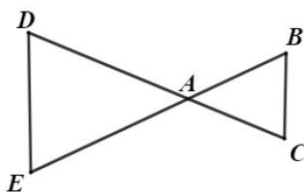
(3) $\triangle GHI \sim \triangle$ _____



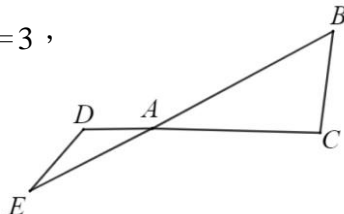
例題 6 SAS 相似練習



- (1) 若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$, $\overline{AD} = \overline{AE} = 5$,
請問： $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 是否相似？



- (2) 若 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{AD} = 2$, $\overline{AE} = 3$,
請問： $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 是否相似？



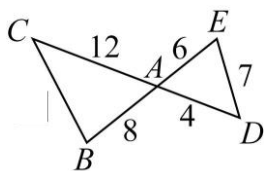
☆筆記

在第(2)小題中， \overline{BC} 和 \overline{DE} 是否平行？為什麼？



牛刀小試 16

1. 如圖

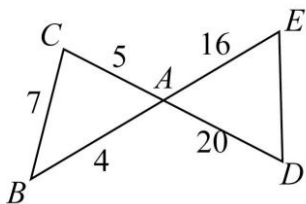


- (1) $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是否相似？
根據什麼相似性質？

- (2) \overline{AC} 的對應邊是_____，
 $\overline{AC} : \overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (3) 求 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$

2.

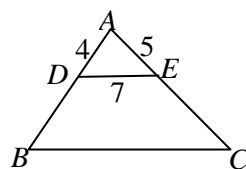


- (1) $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是否相似？
根據什麼相似性質？

- (2) \overline{AC} 的對應邊是_____，
 $\overline{AC} : \overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (3) 求 $\overline{DE} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 如圖， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，
若 $\overline{AB} = 16$, $\overline{AC} = 20$,



- (1) $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是否相似？
根據什麼相似性質？

- (2) \overline{AD} 的對應邊是_____，
 $\overline{AD} : \overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

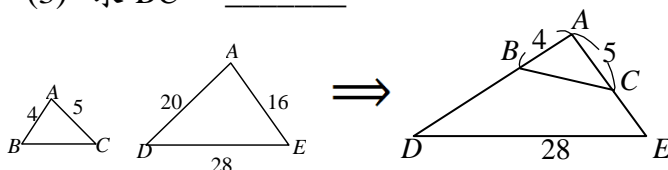
- (3) 求 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，已知 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 5$, $\overline{AD} = 20$, $\overline{AE} = 16$, $\overline{BC} = 28$

- (1) $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 是否相似？
根據什麼相似性質？

- (2) \overline{AB} 的對應邊是_____，
 $\overline{AB} : \overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$

- (3) 求 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$





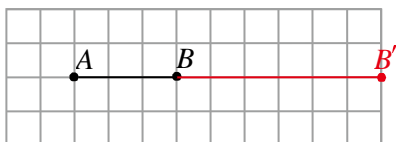
解 答 篇

牛刀小試 1

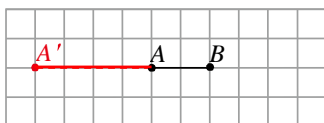
1. C
2. C
3. C
4. C

牛刀小試 2

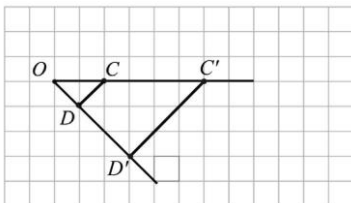
1. (1)



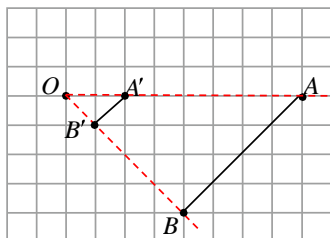
(2)



2. (1)



(2)



3. (1) 3

(2) 9

4. (1) 1 : 5

(2) $\frac{1}{5}$

牛刀小試 3

1.

- (1) 1.5
- (2) 6, 90°

2.

- (1) 0.8
- (2) 4, 120°

3. (1) 3

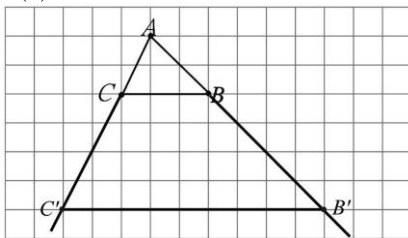
(2) 90° , 40° , 15

4.

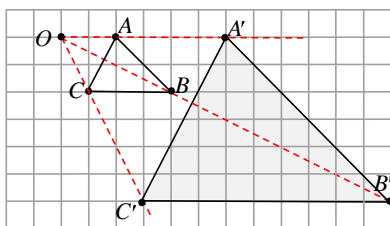
- (1) ☒ 不是, 因為角度不相等
- (2) ☒ 不是, $3:2 \neq 6:6$, 長寬比例不相同
- (3) ☒ 是, 3

牛刀小試 4

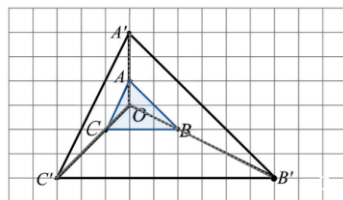
1. (1)



(2)



(3)



2. (1) 1 : 3

(2) 3

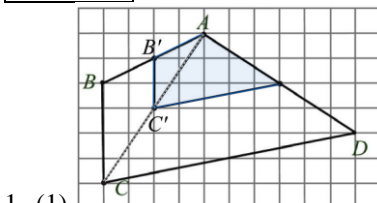
(3) 9

3. (1) 1 : 2

(2) 2

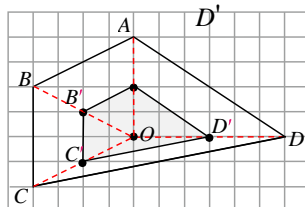
(3) 12

牛刀小試 5

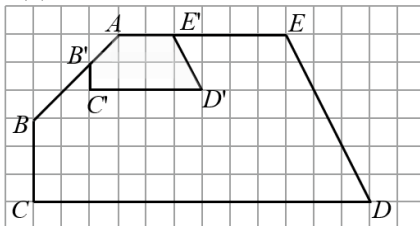


1. (1)

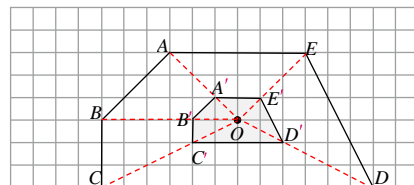
(2)



2. (1)



(2)



牛刀小試 6

1. (1) 4 : 1

(2) 12

(3) 90°

(4) 30°

2. (1) 4 : 1

(2) 4

(3) 20

(4) 30°

3. (1) 1 : 2

(2) 1 : 2

(3) 3

(4) 60°

4. (1) 1 : 2

(2) 1 : 2

(3) 5

(4) 55°

牛刀小試 7

1.

(1) $\angle P$, $\angle B$

(2) \overline{RS} , \overline{AD}

2.

(1) ~

(2) 1 : 3

(3) 18

(4) 90°

3.

(1) ~

(2) 3 : 1

(3) 2, 5

(4) 70°

4.

(1) 3

(2) \overline{PS} , 6, \overline{BC} , 5

(3) 30° , 140°

5.

(1) $\frac{1}{2}$

(2) \overline{QR} , 8, \overline{AD} , 10

(3) 80° , 85°

6.

(1) 3 : 2

(2) 120° , 82°

(3) 9, 4

牛刀小試 8

- 2 : 5
 - \overline{EF} , 5 , \overline{BC} , 6
 - $\angle E$, 96°
- 4 : 3
 - \overline{GH} , 6 , \overline{AB} , 4
 - $\angle E$, 120°
- 2 : 1
 - 24 , 2.5
 - 115°
- 6
 - 88 度
 - 15

牛刀小試 9

- 是
 - 否 , $\overline{AB} : \overline{EF} = 4:8$

$$\overline{AD} : \overline{EH} = 4:7$$

對應邊長的比例不相等

- 乙和丙

- 是
 - 否 , $\overline{AF} : \overline{FB} = 4:8$

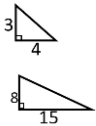
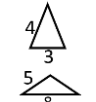
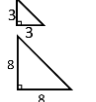
$$\overline{AD} : \overline{FG} = 4:7$$

對應邊長的比例不相等

- 增加 2 公分

牛刀小試 10

- | (1) | 對應角相等 | 對應邊成比例 | 兩個圖形相似 |
|--|-------|--------|--------|
| 兩個長方形
 | ✓ | ✗ | ✗ |
| 兩個平行四邊形
 | ✗ | ✗ | ✗ |
| 兩個菱形
 | ✗ | ✓ | ✗ |

(2)	對應角相等	對應邊成比例	兩個圖形相似
兩個直角三角形 	✗	✗	✗
兩個等腰三角形 	✗	✗	✗
兩個等腰直角三角形 	✓	✓	✓

(3)	對應角相等	對應邊成比例	兩個圖形相似
兩個正三角形 	✓	✓	✓
兩個正方形	✓	✓	✓
兩個正六邊形	✓	✓	✓
兩個圓形	✓	✓	✓

發現以下圖形一定是相似形

- 兩個等腰直角三角形
- 正多邊形
- 圓形

- 否 , $\overline{AB} = 4$, $\overline{EF} = 4 + 2 \times 2 = 8$
 $\overline{AD} = 6$, $\overline{EH} = 6 + 2 \times 2 = 10$
 $\overline{AB} : \overline{EF} \neq \overline{AD} : \overline{EH}$
 邊長不成比例

- 是 , $\overline{AB} = 8$, $\overline{PQ} = 8 - 2 \times 2 = 4$
 $\overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{BC} : \overline{QR}$
 $= \overline{CD} : \overline{RS} = \overline{AD} : \overline{PS}$
 對應邊成比例 , 且每個角都是直角 , 所以是相似形

牛刀小試 11

- $\square \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (根據 AA 相似性質)
 - $\square \triangle ABC \sim \triangle PQR$ (根據 AA 相似性質)
- $\triangle ABC \sim \triangle OMN$
 - $\triangle DEF \sim \triangle LKJ$
 - $\triangle GHI \sim \triangle UST$
 - $\triangle PQR \sim \triangle XZY$

牛刀小試 12

- 是 , (AA 相似)
 - \overline{AB}
 - 3 : 4
 - \overline{BC} , 8

- (1) 是 (AA 相似)

- \overline{AC}
- 2 : 7
- \overline{AE} , 6

- 是 , AA 相似
 - \overline{BC}
 - 1 : 3
 - \overline{AC} , 9

- 是 , AA 相似
 - \overline{EF} , 2 : 3
 - 12

牛刀小試 13

- $\square \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (SSS 相似)
 - $\square \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (SSS 相似)
- $\triangle ABC \sim \triangle LKJ$ (SSS 相似)
 - $\triangle DEF \sim \triangle PRQ$ (SSS 相似)
 - $\triangle XYZ \sim \triangle VTS$ (SSS 相似)

牛刀小試 14

- 是 , SSS 相似
- 是 , SSS 相似
- D
- 是 (SSS 相似)

牛刀小試 15

1. (1) $\square \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (SAS 相似)
(2) $\square \triangle ABC \sim \triangle DFE$ (SAS 相似)
2.
 - (1) $\triangle CAB \sim \triangle RPQ$
 - (2) $\triangle FED \sim \triangle MON$
 - (3) $\triangle GHI \sim \triangle XYZ$

牛刀小試 16

1.
 - (1) 是，SAS 相似
 - (2) \overline{AE} ，2 : 1
 - (3) 14
2.
 - (1) 是，SAS 相似
 - (2) \overline{AD} ，1 : 4
 - (3) 28
3.
 - (1) 是，SAS 相似
 - (2) \overline{AB} ，1 : 4
 - (3) 28
4.
 - (1) 是，SAS 相似
 - (2) \overline{AE} ，1 : 4
 - (3) 7



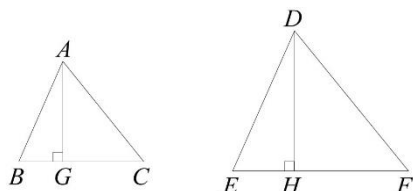
B5 1-4 相似形的應用



概念 ① 相似三角形的高與面積



☆ 若 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且 $A、B、C$ 的對應點分別是 $D、E、F$ ，若 $\overline{AG}、\overline{DH}$ 分別為 \overline{BC} 和 \overline{EF} 上的高，請說明： $\overline{AG} : \overline{DH} = \overline{AB} : \overline{DE}$



☆ 如果 $\overline{AB} : \overline{DE} = 2 : 3$ ，則

① $\overline{AG} : \overline{DH} =$ _____

② $\triangle ABC$ 面積： $\triangle DEF$ 面積 = _____

整理

兩相似三角形

① 對應高的比 = _____。

② 面積比 = _____。

☆ 筆記

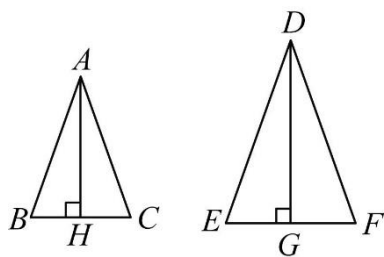


牛刀小試 ①

1. 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

\overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， \overline{DG} 為 \overline{EF} 上的高。

若 $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{EF} = 20$ ，則：



(1) $\overline{BC} : \overline{EF} =$ _____。

(最簡整數比)

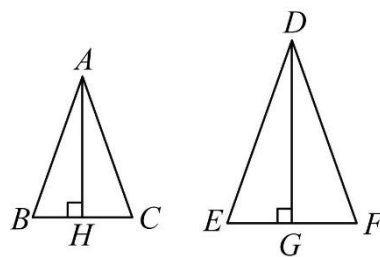
$\overline{AH} : \overline{DG} =$ _____。

(2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面積比為 _____。

2. 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

\overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， \overline{DG} 為 \overline{EF} 上的高。

若 $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{EF} = 20$ ，則：



(1) $\overline{BC} : \overline{EF} =$ _____。

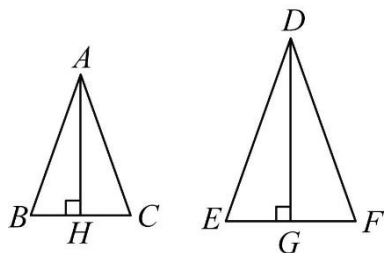
$\overline{AH} : \overline{DG} =$ _____。

(2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面積比為 _____。

3. 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

\overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， \overline{DG} 為 \overline{EF} 上的高。

若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{DE} = 12$ ，則：

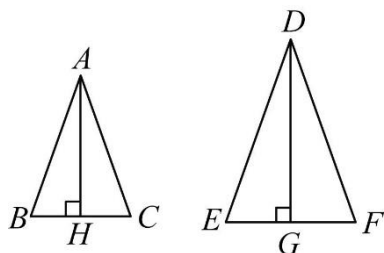


- (1) $\overline{BC} : \overline{EF} =$ _____。
- $\overline{AH} : \overline{DG} =$ _____。
- (2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面積比為_____。
- (3) 若 $\triangle ABC$ 面積是 16，則 $\triangle DEF$ 的面積為_____。

4. 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

\overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， \overline{DG} 為 \overline{EF} 上的高。

若 $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{DF} = 7$ ，則：

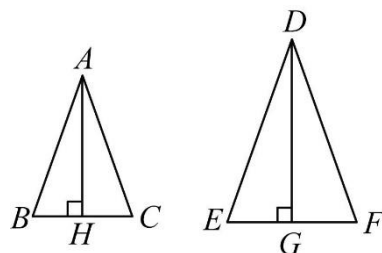


- (1) $\overline{BC} : \overline{EF} =$ _____。
- $\overline{AH} : \overline{DG} =$ _____。
- (2) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面積比為_____。
- (3) 若 $\triangle ABC$ 面積是 50，則 $\triangle DEF$ 的面積為_____。

5. 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

\overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， \overline{DG} 為 \overline{EF} 上的高。

若 $\overline{AH} = 3$ ， $\overline{DG} = 8$ ，則：

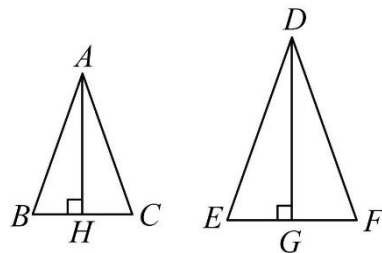


- (1) \overline{BC} 和 \overline{EF} 的長度比為_____。
- (2) 若 $\overline{EF} = 16$ ，求 $\overline{BC} =$ _____。
- (3) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的面積比為_____。

6. 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。

\overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， \overline{DG} 為 \overline{EF} 上的高。

若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 面積比為 4 : 9，則：



- (1) $\overline{BC} : \overline{EF} =$ _____。
- (2) $\overline{AH} : \overline{DG} =$ _____。

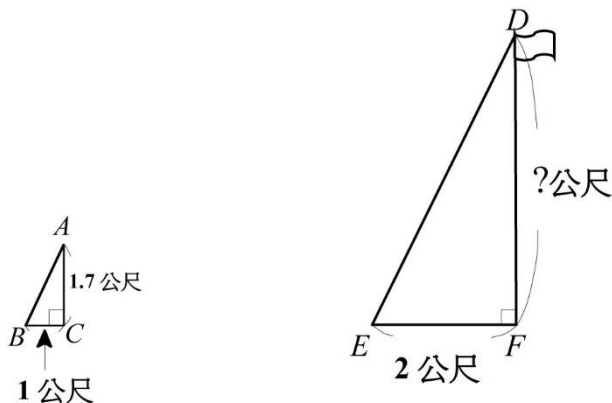


例題 1 測量旗桿的高度



羅澤想測量旗桿的高度

已知：羅澤的身高 $\overline{AC} = 1.7$ 公尺，他的影子 $\overline{BC} = 1$ 公尺
旗桿的影子 $\overline{EF} = 2$ 公尺，求旗桿的高度 $\overline{DF} = ?$



☆筆記

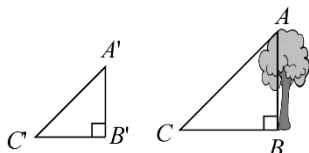
$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 為什麼會相似？



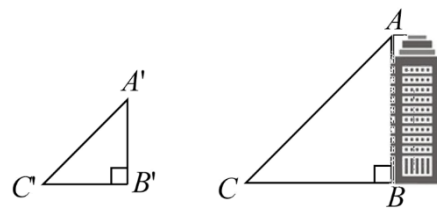
牛刀小試 2

- 秉蓁想要測量與地面垂直的樹之高度 \overline{AB} ，他先測得該樹影子 \overline{BC} 的長度為 350 [公分]，在同一時間，拿一根長 1 [公尺] 的標桿 ($\overline{A'B'}$) 垂直地面，測得影子 $\overline{B'C'}$ 的長度為 0.7 [公尺]。則該樹的高度 \overline{AB} 為 _____ 公尺。

(提示:換成同單位)



- 昱忻想要測量教學大樓的高度 \overline{AB} ，他先測得教學大樓影子 \overline{BC} 的長度為 6 公尺，在同一時間，拿一根長 15 公尺的標桿 ($\overline{A'B'}$) 垂直地面，測得影子 $\overline{B'C'}$ 的長度為 2 公尺。則教學大樓的高度 \overline{AB} 為 _____ 公尺。

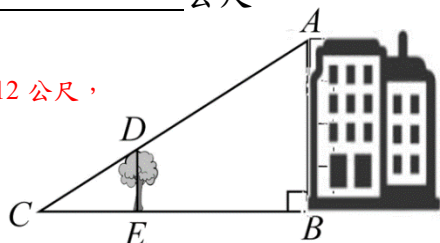


3. 如圖，瑞好想要測量自家大樓高度 \overline{AB} ，距離該大樓前方 12 公尺 E 點有一棵長為 2 公尺大樹 \overline{DE} ，大樓影子長度 \overline{BC} 和大樹影子長度 \overline{CE} 重疊交於 C 點，已知大樓影子長度 \overline{BC} 為 15 公尺，求大樓高度 \overline{AB} _____ 公尺。

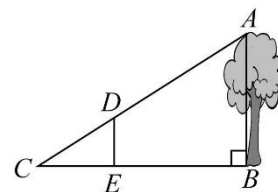
提示：

① B 點和 E 點距離 12 公尺，

② 先算出 \overline{CE} 長



4. 如圖，品希想要測量樹高 \overline{AB} ，她在樹前 15 公尺的 E 點立一根長為 4 公尺的標竿 \overline{DE} ， \overline{AD} 和 \overline{BE} 延長交於 C 點，已知樹的影子長度 \overline{BC} 是 20 公尺，求樹高 \overline{AB} 為 _____ 公尺。



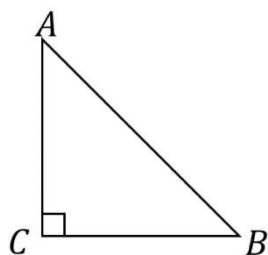


概念

② 特殊直角△的邊長關係(45°—45°—90°)

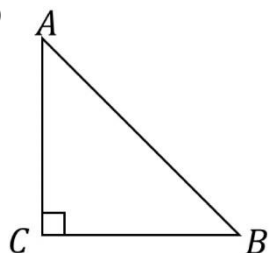


如右圖， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，求 $\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{AB} = ?$



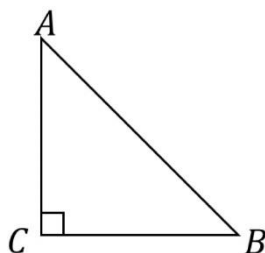
<例>

①



若 $\overline{AC} = 3$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

②



若 $\overline{AB} = 6$ ，則 $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$

☆筆記

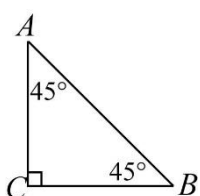


牛刀小試 3

1. 若 $\overline{AC} = 4$ ，求

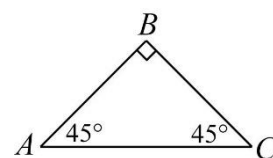
(1) $\overline{BC} =$

(2) $\overline{AB} =$

3. 若 $\overline{AB} = 8$ ，求

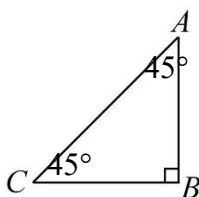
(1) $\overline{BC} =$

(2) $\overline{AC} =$

2. 若 $\overline{BC} = 5$ ，求

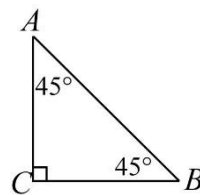
(1) $\overline{AB} =$

(2) $\overline{AC} =$

4. 若 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$ ，求

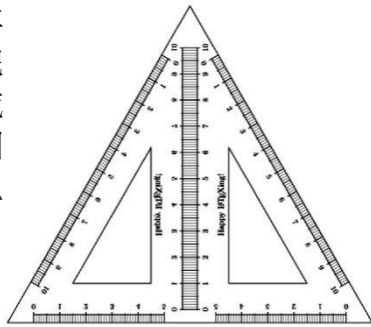
(1) $\overline{BC} =$

(2) $\overline{AC} =$

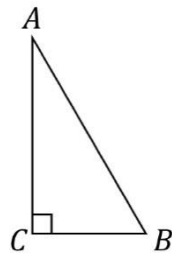




常見的兩種三角板都是直角三角形，其中一種是 30 度—60 度—90 度，我們把兩個這種三角板拼起來剛好可以拼成一個_____（如圖）我們用這個特性來探討 30 度—60 度—90 度直角△的邊長關係。

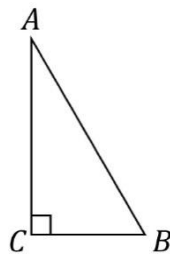


☆筆記



☆如右圖，已知 $\angle A = 30^\circ$ $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$

若 $\overline{BC} = a$ ，求 $\overline{BC} : \overline{AB} : \overline{AC} = ?$

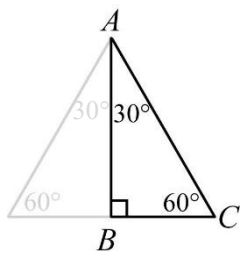


牛刀小試 4

1. 如圖

(1) $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$
= _____

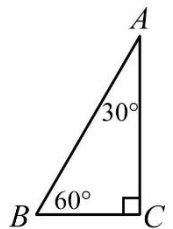
(2) 若 $\overline{BC} = 2$ ，
 $\overline{AC} =$ _____
 $\overline{AB} =$ _____



4. 如圖

(1) $\overline{BC} : \overline{AB} : \overline{AC}$
= _____

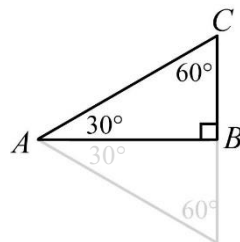
(2) 若 $\overline{AB} = 4$ ，
 $\overline{BC} =$ _____
 $\overline{AC} =$ _____



2. 如圖

(1) $\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB}$
= _____

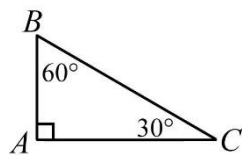
(2) 若 $\overline{BC} = 4$ ，
 $\overline{AC} =$ _____
 $\overline{AB} =$ _____



5. 如圖

(1) $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$
= _____

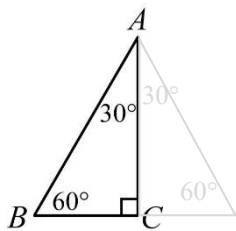
(2) 若 $\overline{BC} = 6$ ，
 $\overline{AB} =$ _____
 $\overline{AC} =$ _____



3. 如圖

(1) $\overline{BC} : \overline{AB} : \overline{AC}$
= _____

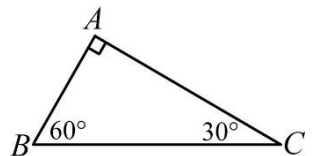
(2) 若 $\overline{BC} = 6$ ，
 $\overline{AB} =$ _____
 $\overline{AC} =$ _____



6. 如圖

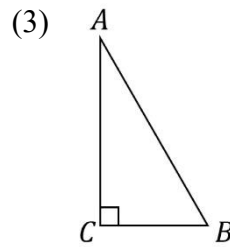
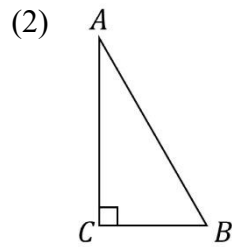
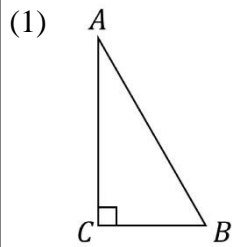
(1) $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$
= _____

(2) 若 $\overline{BC} = 8$ ，
 $\overline{AB} =$ _____
 $\overline{AC} =$ _____



**例題****③** **$30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形的邊長比**已知： $\angle A=30^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$

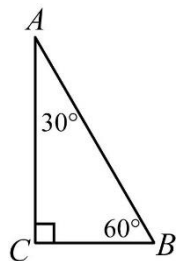
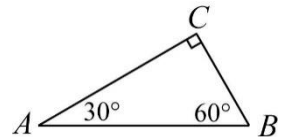
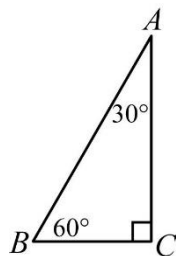
☆筆記



(2)
若 $\overline{BC}=2$ ，
求 $\overline{AB} =$ _____，
 $\overline{AC} =$ _____

若 $\overline{AB}=10$ ，
求 $\overline{BC} =$ _____，
 $\overline{AC} =$ _____

若 $\overline{AC}=6$ ，
求 $\overline{BC} =$ _____，
 $\overline{AB} =$ _____

**牛刀小試 5**1. 若 $\overline{BC}=3$ ，求 $\overline{AB} =$ $\overline{AC} =$ 3. 若 $\overline{AC}=6\sqrt{3}$ ，求 $\overline{BC} =$ $\overline{AB} =$ 2. 若 $\overline{AC}=4\sqrt{3}$ ，求 $\overline{BC} =$ $\overline{AB} =$ 



概念 4 直角△的邊長比值



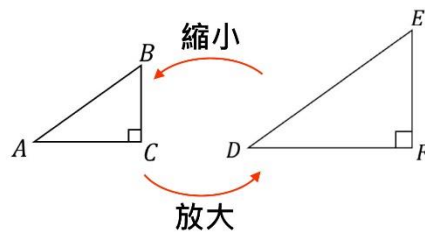
☆如果我們把直角△ABC 放大成△DEF
則_____

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} \quad (\text{對應邊成比例})$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$$

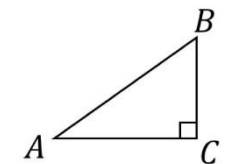
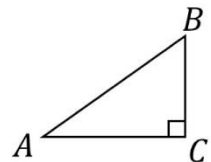
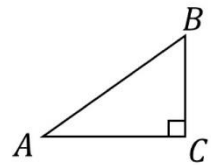
$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

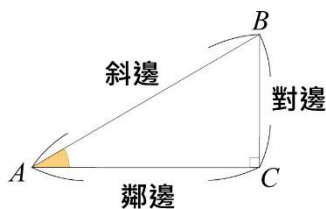


我們發現：
不管放大或縮小幾倍，這些直角△的邊長比值都是固定的！

☆筆記



☆



$$\frac{BC}{AB} = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}} = \sin A$$

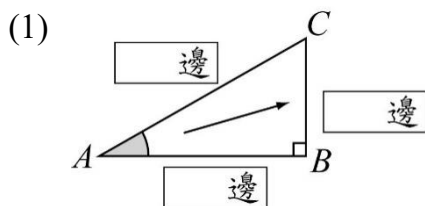
$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \cos A$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}} = \tan A$$



牛刀小試 6

1. 以 A 為觀察點，請在空格中填入「斜」、「對」、「鄰」

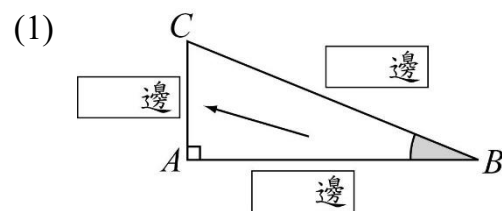


(2) $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的 } \boxed{\text{對}} \text{ 邊長}}{\boxed{\text{斜}} \text{ 邊長}}$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的 } \boxed{\text{鄰}} \text{ 邊長}}{\boxed{\text{斜}} \text{ 邊長}}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的 } \boxed{\text{對}} \text{ 邊長}}{\angle A \text{ 的 } \boxed{\text{鄰}} \text{ 邊長}}$$

2. 以 B 為觀察點，請在空格中填入「斜」、「對」、「鄰」



(2) $\sin B = \frac{\angle B \text{ 的 } \boxed{\text{對}} \text{ 邊長}}{\boxed{\text{斜}} \text{ 邊長}}$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的 } \boxed{\text{鄰}} \text{ 邊長}}{\boxed{\text{斜}} \text{ 邊長}}$$

$$\tan B = \frac{\angle B \text{ 的 } \boxed{\text{對}} \text{ 邊長}}{\angle B \text{ 的 } \boxed{\text{鄰}} \text{ 邊長}}$$



例題 4 直角△的邊長比值

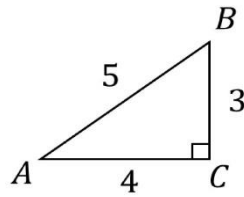


如右圖，已知： $\angle C=90^\circ$ ， $\overline{BC}=3$ ，
 $\overline{AC}=4$ ， $\overline{AB}=5$ ，求

(1) $\sin A =$ _____

(2) $\cos A =$ _____

(3) $\tan A =$ _____



☆筆記



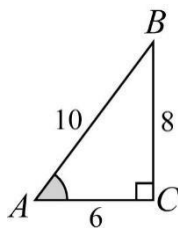
牛刀小試 7

1. 如圖，求

(1) $\sin A =$ _____

(2) $\cos A =$ _____

(3) $\tan A =$ _____

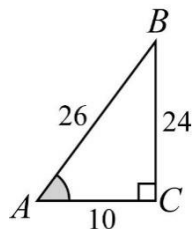


2. 如圖，求

(1) $\sin A =$ _____

(2) $\cos A =$ _____

(3) $\tan A =$ _____

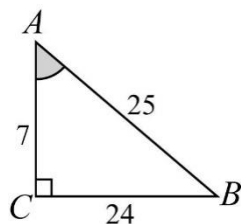


3. 如圖，求

(1) $\sin A =$ _____

(2) $\cos A =$ _____

(3) $\tan A =$ _____

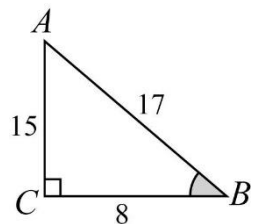


4. 如圖，求

(1) $\sin B =$ _____

(2) $\cos B =$ _____

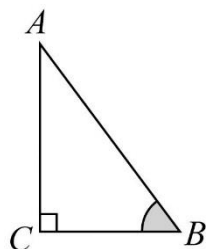
(3) $\tan B =$ _____



5. 若 $\sin B = \frac{12}{13}$ ，則

(1) $\cos B =$ _____

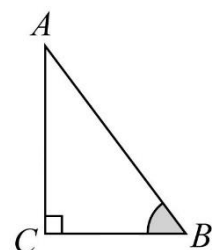
(2) $\tan B =$ _____



6. 若 $\sin B = \frac{15}{17}$ ，則

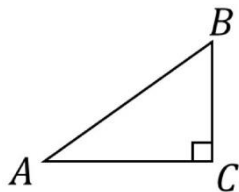
(1) $\cos B =$ _____

(2) $\tan B =$ _____





例題 5 特殊直角△的邊長比值

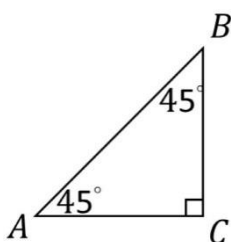


$$\sin A = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cos A = \underline{\hspace{2cm}} \quad \tan A = \underline{\hspace{2cm}}$$

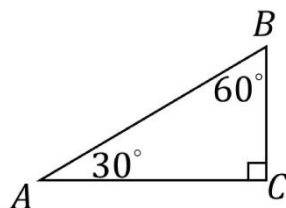
☆筆記

<練習>

(1)



(2)



① $\sin 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

① $\sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

① $\sin 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

② $\cos 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

② $\cos 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

② $\cos 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\tan 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\tan 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

③ $\tan 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$



牛刀小試 8

1. (1) $\sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sin 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sin 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

2. (1) $\cos 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\cos 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

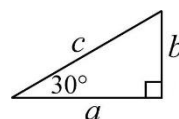
(3) $\cos 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

3. (1) $\tan 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\tan 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\tan 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

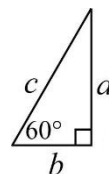
4. 若 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$



(1) 表示圖中， $\frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$

(2) 若 $c = 10$ ，則 $b = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 若 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$



(1) 表示圖中， $\frac{\square}{\square} = \frac{1}{2}$

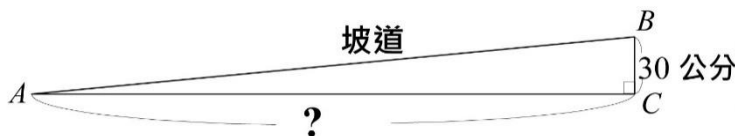
(2) 若 $c = 12$ ，則 $b = \underline{\hspace{2cm}}$



例題 6 三角比的應用



「無障礙通行空間設置坡道，其坡度不得大於 $\frac{1}{12}$ 」。其中，
 坡度 = $\frac{\text{高度}}{\text{水平距離}}$ ，蘭花國中想設置一個無障礙通行坡道，
 其中高度 BC 為 30 公分，則水平距離至少要多少公分才能符合規定？



☆筆記

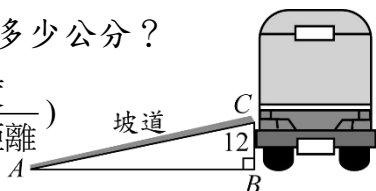
請問：題目中的 $\frac{1}{12}$ 指的是 $\sin A$ 、 $\cos A$ 還是 $\tan A$ ？



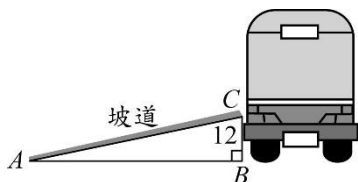
牛刀小試 9

1. 如下圖，公車的門可設置臨時殘障坡道，讓身障者的輪椅及娃娃車能輕鬆上車。已知坡度是 $\frac{1}{9}$ 且公車門到地板的垂直高度 \overline{BC} 為 12 公分，求此殘障坡道的水平距離 \overline{AB} 是多少公分？

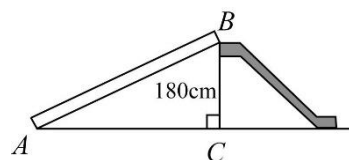
(提示：坡度 = $\frac{\text{高度}}{\text{水平距離}}$)



2. 如下圖，公車的門可設置臨時殘障坡道，讓身障者的輪椅及娃娃車能輕鬆上車。已知坡度是 $\frac{1}{10}$ 且公車門到地板的垂直高度 \overline{BC} 為 12 公分，求此殘障坡道的水平距離 \overline{AB} 是多少公分？

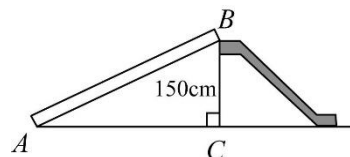


3. 如下圖，某公園有一座溜滑梯，其地面所形成的角度為 A ，已知 $\tan A = \frac{3}{4}$ ，且最高點的垂直高度為 180 公分，求此溜滑梯的水平距離 \overline{AC} 是多少公分？



(提示： $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$)

4. 如下圖，某公園有一座溜滑梯，其地面所形成的角度為 A ，已知 $\tan A = \frac{3}{4}$ ，且最高點的垂直高度為 150 公分，求此溜滑梯的水平距離 \overline{AC} 是多少公分？





解 答 篇

牛刀小試 1

- $3:4, 3:4$
 - $9:16$
- $3:5, 3:5$
 - $9:25$
- $2:3, 2:3$
 - $4:9$
- 36
- $5:7, 5:7$
 - $25:49$
- 98
- $3:8$
 - 6
- $9:64$
- $2:3$
 - $2:3$

牛刀小試 2

- 5
- 45
- 10
- 16

牛刀小試 3

- 4
 - $4\sqrt{2}$
- 5
 - $5\sqrt{2}$
- 8
 - $8\sqrt{2}$
- 3
 - 3

牛刀小試 4

- $1:2:\sqrt{3}$
 - $4:2\sqrt{3}$
- $1:2:\sqrt{3}$
 - $8:4\sqrt{3}$
- $1:2:\sqrt{3}$
 - $12:6\sqrt{3}$
- $1:2:\sqrt{3}$
 - $2:2\sqrt{3}$
- $1:2:\sqrt{3}$
 - $3:3\sqrt{3}$
- $1:\sqrt{3}:2$
 - $4:4\sqrt{3}$

牛刀小試 5

- $6, 3\sqrt{3}$
- $4, 8$
- $6, 12$

牛刀小試 6

- $$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ 的對邊長}}{\angle A \text{ 的鄰邊長}}$$

- $$\sin B = \frac{\angle B \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$$

$$\tan B = \frac{\angle B \text{ 的對邊長}}{\angle B \text{ 的鄰邊長}}$$

牛刀小試 7

- $\frac{4}{5}$
 - $\frac{3}{5}$
 - $\frac{4}{3}$
- $\frac{12}{13}$
 - $\frac{5}{13}$
 - $\frac{12}{5}$
- $\frac{24}{25}$
 - $\frac{7}{25}$
 - $\frac{24}{7}$
- $\frac{15}{17}$
 - $\frac{8}{17}$
 - $\frac{15}{8}$
- $\frac{5}{13}$
 - $\frac{12}{5}$
- $\frac{8}{17}$
 - $\frac{15}{8}$

牛刀小試 8

- $\frac{1}{2}$
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - $\sqrt{3}$
 - 1
- $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$
 - 5
- $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$
 - 6

牛刀小試 9

- 108cm
- 120cm
- 240cm
- 200cm



B5 2-1 點直線與圓之間的位置關係



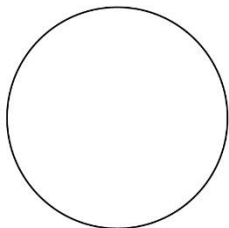
概念

① 什麼是圓？

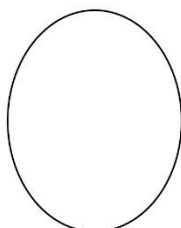


☆ 宇澤、侑安和桓辰三個人在黑板上畫圓，你覺得誰畫的比較圓？為什麼？

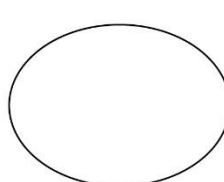
宇澤



侑安



桓辰



☆圓的意義：

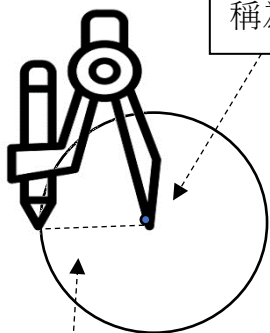
☆筆記

1. 請用圓規畫一個半徑 1.5 公分的圓，並指出圓心和半徑
2. 請問：圓心是不是圓的一部分？
3. 請問：你覺得圓比較像橡皮筋？還是 PIZZA 的皮？



牛刀小試 1

1. 認識圓



(1) 圓規針尖固定點稱為_____

(3) 圓規筆尖畫出的這一圈，稱為_____

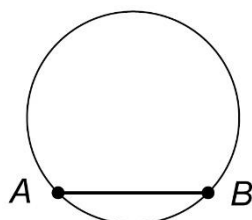
(2) 筆尖和針尖之間的距離稱為_____

2. 請畫出一直徑為 5 公分的圓，並指出圓心 O 與半徑。



1. 弦：_____

2. 弧：_____



<註>

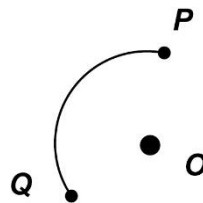
① 通過圓心的弦稱為_____

② 圓內最長的弦是_____

③ 半徑是不是弦？_____

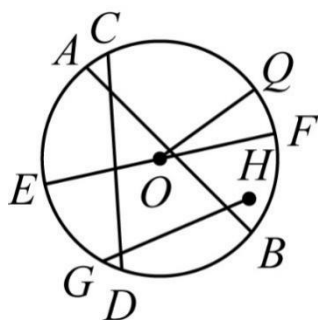
☆筆記

1. 比較優弧、劣弧和半圓的大小

2. 請問 \widehat{PQ} 是優弧還是劣弧？為什麼？

牛刀小試 2

1.



如圖

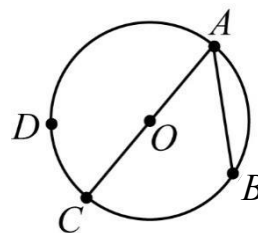
(1) 哪些為弦？答：_____

(2) 哪些是半徑？答：_____

(3) 最長的弦為_____

(4) 哪些不是弦？答：_____

2. 請用不同顏色在圖形上標示下列各弧，並用符號表示



(1) 以 A、B 為端點的優弧：_____

(2) 以 A、B 為端點的劣弧：_____

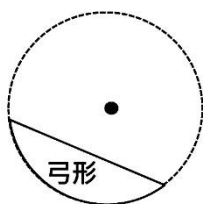
(3) 請比較優弧、劣弧和半圓的大小：_____



☆①扇形

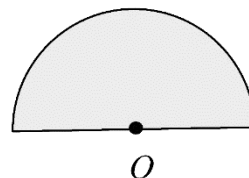


②弓形



☆筆記

請問：半圓弧和直徑所圍成的圖形是扇形還是弓形？

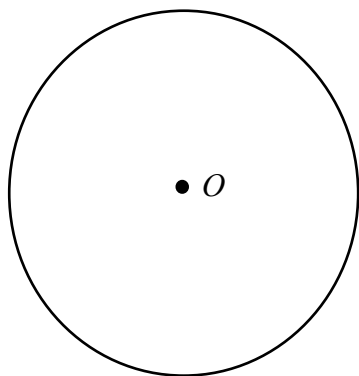


牛刀小試 3

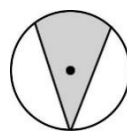
1. (1)一弦和一弧會形成的圖形稱為_____

(2)兩半徑和一弧所形成的圖形稱為_____

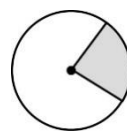
(3)請在下圖中畫出一個弓形及扇形



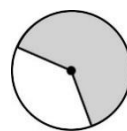
2. 下列哪些為扇形？_____
哪些為弓形？_____



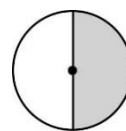
(A)



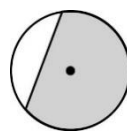
(B)



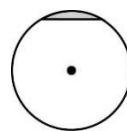
(C)



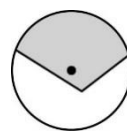
(D)



(E)



(F)



(G)

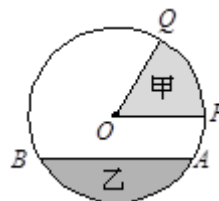
3. 如右圖，圓 O 中，

(1) \overline{OP} 稱為_____，

(2) \overline{AB} 稱為_____，

(3) \overline{OP} 、 \overline{OQ} 與 \widehat{PQ} 所組成的圖形區域甲稱為_____，

\overline{AB} 與 \widehat{AB} 所組成的圖形區域乙稱為_____





概念

④ 弧長與扇形面積



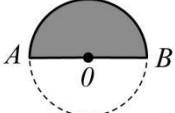
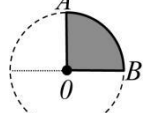
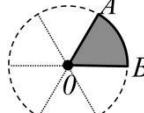
☆複習 ①圓周長=_____ = _____



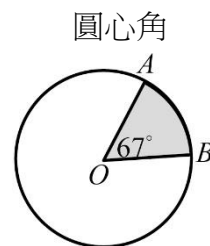
②圓面積=_____

③弧長與扇形面積

☆圓周率

半圓 	$\frac{1}{4}$ 圓 	$\frac{1}{6}$ 圓 
\widehat{AB} 的弧長	\widehat{AB} 的弧長	\widehat{AB} 的弧長
扇形 AOB 的面積	扇形 AOB 的面積	扇形 AOB 的面積
為什麼是 $\frac{1}{2}$?	為什麼是 $\frac{1}{4}$?	為什麼是 $\frac{1}{6}$?

☆筆記



- ① 以圓心為頂點，兩半徑為邊所組成的角稱為_____ 如上圖的_____
- ② \widehat{AB} 的弧長是圓周長的 _____
- ③ 扇形 AOB 的面積是整個圓的 _____



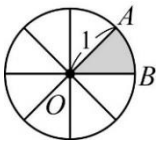
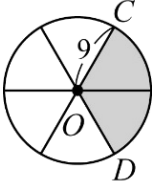
牛刀小試 ④

1. 算出下列圓周長和圓面積：

(1) 半徑為 3

(2) 半徑為 4

2. 寫出下列各題灰色區域是圓的幾分之幾，並求圓心角角度、弧長及扇形面積
(提示:圓心角度數=360°×幾分之幾的圓)

		
幾分之幾的圓		
圓心角度數		
弧長		
扇形面積		



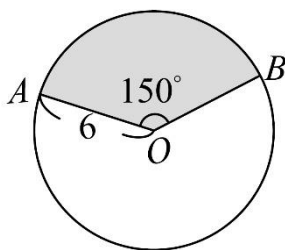
例題 1 計算弧長與扇形面積



如圖，已知：圓 O 的半徑是 6， \widehat{AB} 所對的圓心角為 150°

求(1) \widehat{AB} 的長度

(2) 扇形 AOB 面積



☆筆記



牛刀小試 5

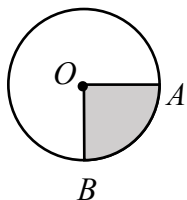
1. 若圓 O 半徑為 5， \widehat{AB} 所對的圓心角為 90° ，則：

(1) 灰色區域是圓的 _____

(2) \widehat{AB} 長度為 _____

(2) 扇形 AOB 面積為 _____

(提示: $\frac{90}{360}$)

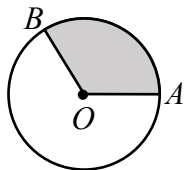


2. 若圓 O 半徑為 6， \widehat{AB} 所對的圓心角為 120° ，則：

(1) 灰色區域是圓的 _____

(2) \widehat{AB} 的長度為 _____

(3) 扇形 AOB 面積為 _____

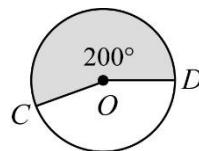


3. 若圓 O 半徑為 9，優弧 \widehat{CD} 所對的圓心角為 200° ，則：

(1) 優弧 \widehat{CD} 的長度。

(2) 扇形 COD 的面積。

(3) 扇形 COD 的周長。

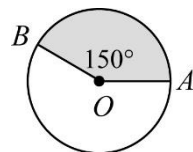


4. 若圓 O 直徑為 20， \widehat{AB} 所對的圓心角為 150° ，則：

(1) \widehat{AB} 的長度。

(2) 扇形 AOB 的面積。

(3) 扇形 AOB 的周長。





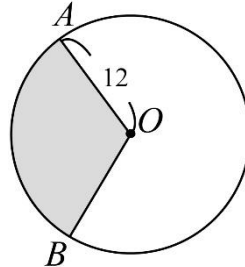
例題 ② 計算圓心角與扇形面積



如圖，已知：圓 O 的半徑是 12， $\widehat{AB} = 8\pi$

求(1) $\angle AOB$ 的度數

(2) 扇形 AOB 面積



☆筆記



牛刀小試 6

1. 若圓 O 半徑為 9， $\widehat{AB} = 3\pi$ ，求

(1) \widehat{AB} 弧長是圓周長的_____。

(2) $\angle AOB$ 度數為_____。

(3) 扇形 AOB 面積為_____。

(提示：圓面積 = 半徑² π)

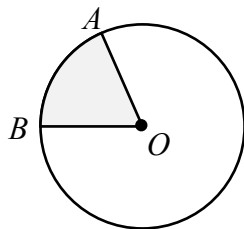
(1) 提示：算出圓周長，再算 \widehat{AB} 所占比例

圓周長 = 半徑 $\times 2 \times \pi$

= _____ $\times 2 \times \pi$

= _____

$\frac{3\pi}{\text{圓周長}} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

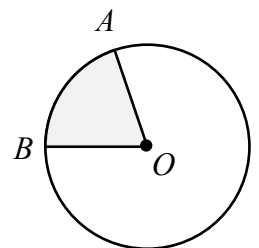


2. 若圓 O 半徑為 20， $\widehat{AB} = 8\pi$ ，求

(1) \widehat{AB} 弧長是圓周長的_____。

(2) $\angle AOB$ 度數為_____。

(3) 扇形 AOB 面積為_____。



3. 若圓 O 直徑為 20， $\widehat{CD} = 10\pi$ ，求

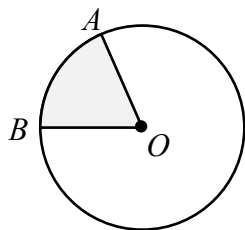
(1) $\angle COD$ 度數為_____。

(2) 扇形 COD 面積為_____。

(1)提示:算出圓周長，再算 \widehat{AB} 所占比例

圓周長=直徑 $\times \pi$

=_____ $\times \pi$



4. 若圓 O 直徑為 40， \widehat{PQ} 的長度為 5π ，則

(1) $\angle POQ$ 度數為_____。

(2) 扇形 POQ 的面積為_____。

5. 若圓 O 半徑為 8，扇形 AOB 面積為 8π ，則

(1)扇形 AOB 面積是圓面積的_____。

(2) $\angle AOB$ =_____。

(3) \widehat{AB} 的長度=_____。

(提示:算出圓面積，再算扇形 AOB 面積所占比例)

6. 若圓 O 半徑為 12，扇形 COD 面積為 16π ，則

(1)扇形 COD 面積是圓面積的_____。

(2) $\angle COD$ =_____。

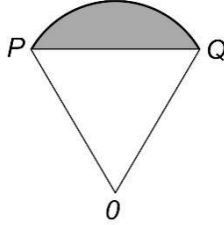
(3) \widehat{CD} 的長度=_____。



例題 ③ 計算弓形面積與周長



如圖，扇形 OPQ 中，已知：半徑是 12， $\triangle OPQ$ 為正 \triangle
 求(1)藍色弓形的周長
 (2)藍色弓形的面積



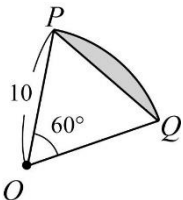
☆筆記



牛刀小試 7

求出下列灰色區域的弓形周長和面積

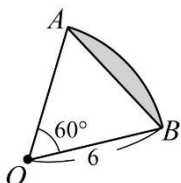
1.



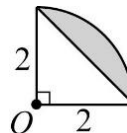
弓形周長=弧長+弦長

弓形面積=扇形-三角形

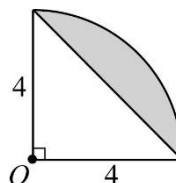
2.



3.

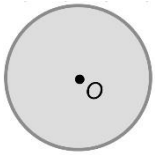


4.





☆1.

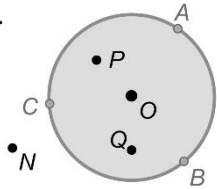


我們說的圓指的是_____

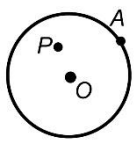
圓心 O 在圓的_____

其他的區域稱為圓的_____

2.

① A 、 B 、 C 三點都在圓周那一圈，我們說 A 、 B 、 C 三點在_____ \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 都_____半徑② O 、 P 、 Q 三點在_____ \overline{OP} 、 \overline{OQ} 都_____半徑③ M 、 N 兩點在_____ \overline{OM} 、 \overline{ON} 都_____半徑

☆整理

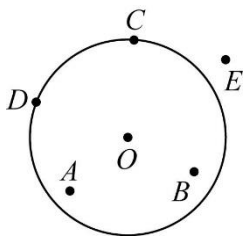


	點與圓的關係	圓心到點的距離 與半徑(r)的關係
點 A		
點 P		
點 M		

☆筆記



牛刀小試 8

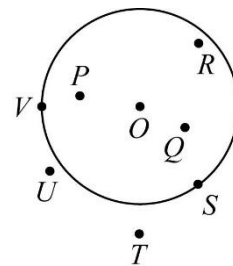
1. 判斷各點與圓 O 的位置關係。

(1) 點在圓內：_____

(2) 點在圓上：_____

(3) 點在圓外：_____

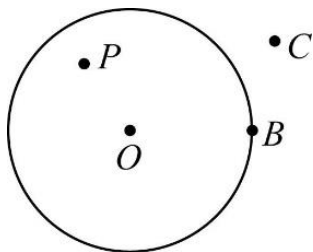
2.

(1) 與圓心 O 的距離小於半徑的點：

(2) 與圓心 O 的距離等於半徑的點：

(3) 與圓心 O 的距離大於半徑的點：

3.

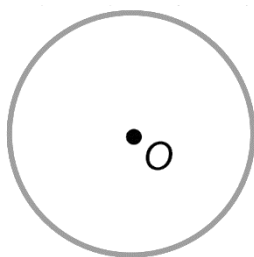


	與圓的位置關係	圓心到點的距離與半徑 r 的關係
P 點	在圓_____	\overline{OP} _____ r
B 點	在圓_____	\overline{OB} _____ r
C 點	在圓_____	\overline{OC} _____ r

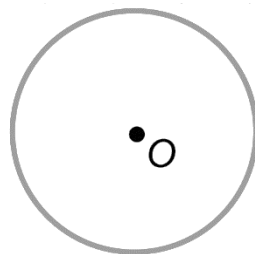
4. 已知圓 O 的半徑是 5，且有 A 、 B 、 C 三點，若 $\overline{OA} = 2$ ， $\overline{OB} = 5$ ， $\overline{OC} = 8$ ，則

(1) 在圓上的點是_____

(2) 在圓外的點是_____



5. 圓 O 外有一點 A 到圓心 O 的距離是 7，圓 O 內有一點 B 到圓心 O 的距離是 4。若圓 O 的半徑是 r ，請問：半徑 r 可能的範圍_____。



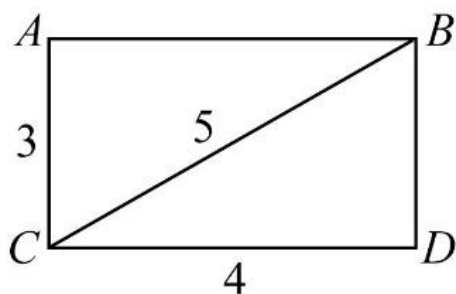
6. 如圖，長方形 $ABCD$ 中，若以 C 點為圓心， r 為半徑畫圓。

(1) 欲使 A 點在圓上，則半徑 $r =$ _____。

(2) 欲使 A 、 C 二點在圓內， D 、 B 二點在圓外，則半徑 r 可能範圍_____。

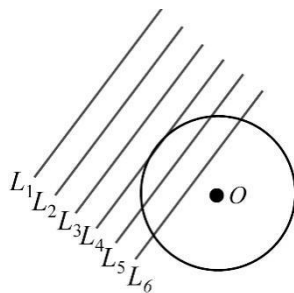
(3) 欲使 D 點在圓上，則半徑 $r =$ _____。

(4) 欲使 A 、 C 、 D 三點在圓內， B 點在圓外，則半徑 r 可能範圍_____。
(請用尺規試著畫畫看。)





☆請觀察直線慢慢向圓靠近時，
直線和圓的交點有什麼改變？



☆筆記

☆整理

請用紅筆，畫出圓心 O 到直線 L 的距離(D)			
直線與圓的交點個數			
D 與半徑(r)的關係			
直線 L 的名稱			

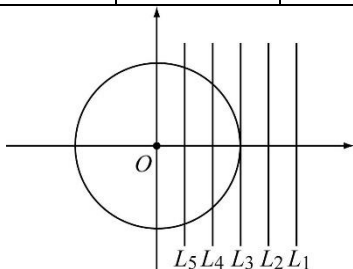


牛刀小試 9

1. 畫出圓心到直線的距離 D 。

直線與圓的交點個數		
D 與半徑(r)的關係		
L 名稱		

2.



(1) 哪些直線與圓 O 交於 2 點？

答：_____

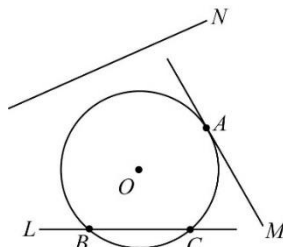
(2) 哪些直線與圓 O 交於 1 點？

答：_____

(3) 哪些直線與圓 O 沒有交點？

答：_____

3.



如圖有一半徑為 5 的圓及三條直線 L 、 M 、 N ，則：

(1) 圓心 O 到直線的距離為 3 的是直線_____。

(2) 圓心 O 到直線的距離為 5 的是直線_____。

(3) 圓心 O 到直線的距離為 8 的是直線_____。

(4) 哪一條是切線？答：_____。

(5) 哪一條是割線？答：_____。

(6) 哪一個點是切點？答：_____。

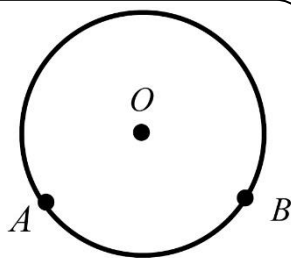
4. 已知圓 O 的切線和圓的距離是 8，則圓 O 的半徑是_____。

5. 當直線與圓心的距離小於半徑，則此直線和圓會有_____個交點。

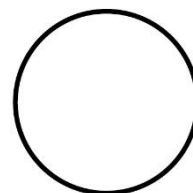
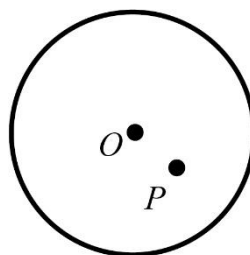


☆1. 弦：

2. 弦心距：

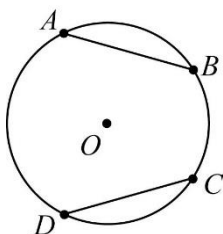


☆筆記

<例>畫出通過 P 點最長的弦和最短的弦

牛刀小試 10

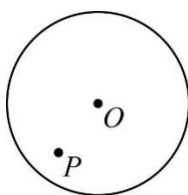
1. 請分別畫出分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的弦心距 \overline{OM} 、 \overline{ON} 。



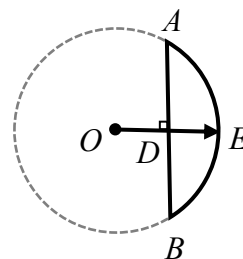
2. 通過 P 點的弦有多少條？

答：_____

請畫出通過 P 點最長的弦 \overline{AB} 及最短的弦 \overline{CD} 。



3. 「箭在弦上，不得不發。」
請問圖中：



- (1) 弦指的是_____。
- (2) 箭指的是_____。
- (3) 箭中 \overline{OD} 正是_____。

4. 圓 O 上最長的弦是 8，則

- (1) 此圓的直徑是_____。
- (2) 此弦的弦心距是_____。



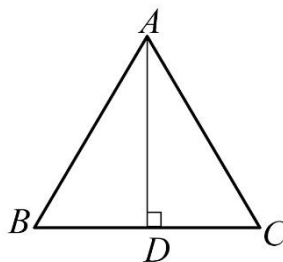
☆複習

D 如果 $\triangle ABC$ 是等腰 \triangle

$$\overline{AB} = \overline{AC}, \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

我們可以知道：

\overline{BD} 和 \overline{CD} 會_____



☆筆記

☆弦心距性質 1

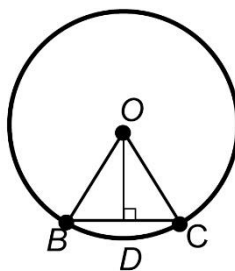
假設 \overline{BC} 是弦， \overline{OD} 是弦心距

1. $\triangle OBC$ 是_____ \triangle (因為_____)

2. $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ (因為 \overline{OD} 是_____)

3. 我們知道_____

也就是 \overline{OD} 把 \overline{BC} _____

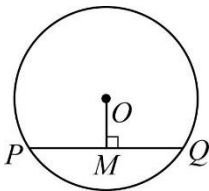


牛刀小試 11

1. 在半徑為 5 的圓 O 中， $\overline{PQ} = 8$ ，則：

(1) $\overline{PM} =$ _____

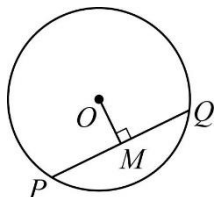
(2) $\overline{OM} =$ _____



2. 在半徑為 10 的圓 O 中， $\overline{PQ} = 12$ ，則：

(1) $\overline{PM} =$ _____

(2) $\overline{OM} =$ _____

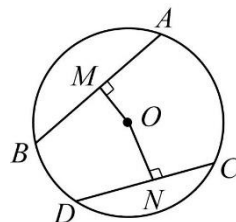


3. 在半徑為 17 的圓 O 中， $\overline{OM} = 8$ ，

$\overline{ON} = 15$ ，求：

(1) $\overline{AB} =$ _____

(2) $\overline{CD} =$ _____

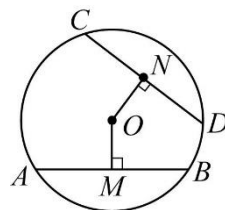


4. 如圖，已知 $\overline{CD} = 8$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{ON} =$

3，求：

(1) $\overline{OM} =$ _____

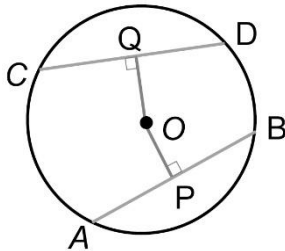
(2) 半徑 $r =$ _____





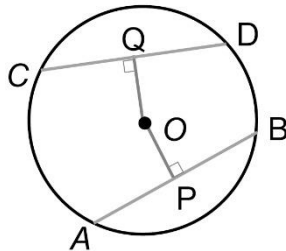
☆1. \overline{OP} 和 \overline{OQ} 分別是 \overline{AB} 和 \overline{CD} 的弦心距

如果 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，那麼 $\overline{OP} = \overline{OQ}$
為什麼？



☆2. \overline{OP} 和 \overline{OQ} 分別是 \overline{AB} 和 \overline{CD} 的弦心距

如果 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ ，那麼 $\overline{AB} = \overline{CD}$
為什麼？



整理

☆筆記



牛刀小試 12

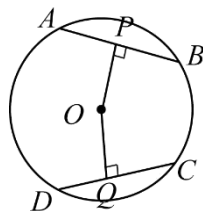
1. \overline{OP} 和 \overline{OQ} 分別是 \overline{AB} 和 \overline{CD} 的弦心距。

若 $\overline{AB} = \overline{CD} = 24$ ，則在半徑為 13 的圓中，則

(1) $\overline{OP} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\overline{OQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 若兩弦的長度相等時，
請問：此兩弦的弦心距相等嗎？



2. \overline{OM} 和 \overline{ON} 分別是 \overline{AB} 和 \overline{CD} 的弦心距。

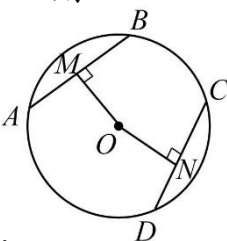
若 $\overline{OM} = \overline{ON} = 3$ ，半徑為 5，則

(1) $\overline{MB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(4) 若兩弦的弦心距相等時，
請問：此兩弦的長度相等嗎？

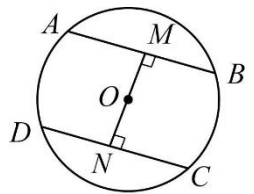


3. 在一半徑為 10 的圓中， $\overline{OM} = \overline{ON} = 6$ ，則

(1) $\overline{AM} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) $\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。





☆複習 圓內最長的弦_____

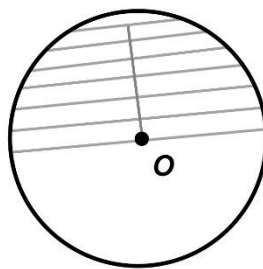
它的弦心距是_____

問題 1. 如果弦變大，弦心距會_____

為什麼？

2. 如果弦心距變大，弦會_____

為什麼？



☆筆記



整理

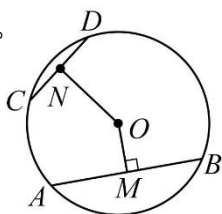


牛刀小試 13

1. 在半徑為 5 的圓中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{CD} = 6$ ，求

(1) \overline{OM} 和 \overline{ON} 長度。

(2) 比較 \overline{OM} 和 \overline{ON} 大小。

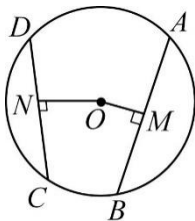


2. 在半徑為 10 的圓 O 中， $\overline{AB} = 16$ ，

$\overline{CD} = 12$ ，求：

(1) \overline{OM} 和 \overline{ON} 的長度。

(2) 比較 \overline{OM} 和 \overline{ON} 的大小。



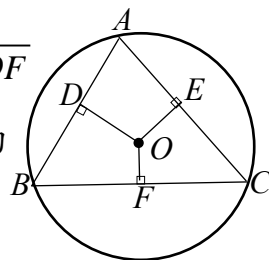
3. 如圖， \overline{OD} 、 \overline{OE} 、 \overline{OF}

分別是 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 的

弦心距且 $\overline{AB} = 5$ ，

$\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BC} = 7$ ，

請比較 \overline{OD} 、 \overline{OE} 、 \overline{OF} 的大小



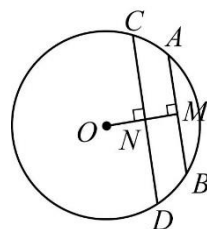
4. 在半徑為 10 的圓 O 中， $\overline{AB} = 12$ ，

$\overline{CD} = 16$ ，求：

(1) $\overline{OM} =$ _____

(2) $\overline{ON} =$ _____

(3) $\overline{MN} =$ _____



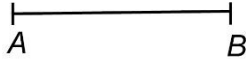


概念 11 弦的垂直平分線通過圓心

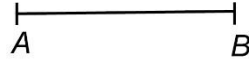


☆複習 中垂線性質

①

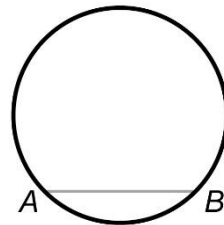


②



☆ 弦的中垂線會通過_____

為什麼？



☆筆記

① 弦心距會把弦_____

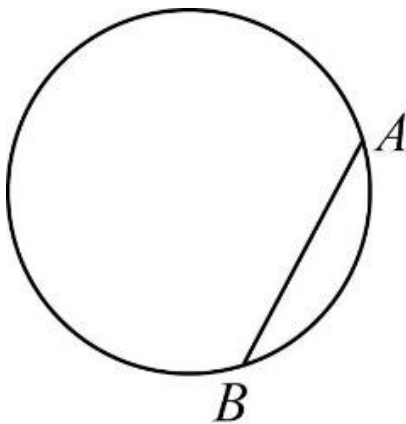
② 弦的垂直平分線會_____

③ 弦的中點與圓心連線會和弦_____

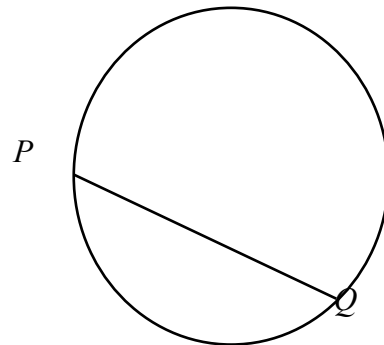


牛刀小試 14

1. 請畫出弦 \overline{AB} 的中垂線。



2. 請畫出弦 \overline{PQ} 的中垂線。

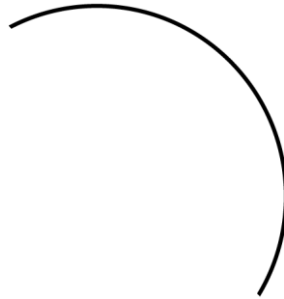




例題 4 找圓心



姿穎想用圓規畫一個圓，但是畫到一半筆芯斷了，
請你幫她完成這一個完整的圓

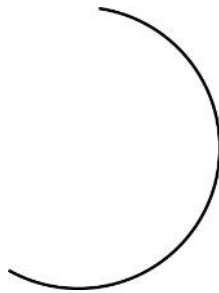


☆筆記

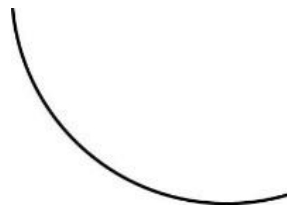


牛刀小試 15

1. 請利用尺規作圖，找出圓心 O 位置，再
畫成一個完整的圓。



2. 請利用尺規作圖，先找到圓心位置，再
完成一個完整的圓。





概念 12 圓的切線

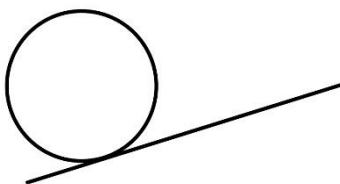


☆ 1 切線

2 圖示

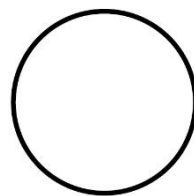
切點

相切



☆ 筆記

切線與割線



1. 直線和圓相切時：

① 圓心到切線的距離 = _____

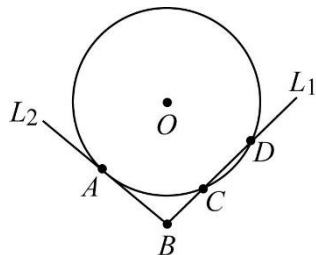
② 圓心和切點的連線會 _____

2. 在圓 O 上找一點 A ，與 \overline{OA} 垂直的直線就是圓 O 的 _____， A 點就是 _____

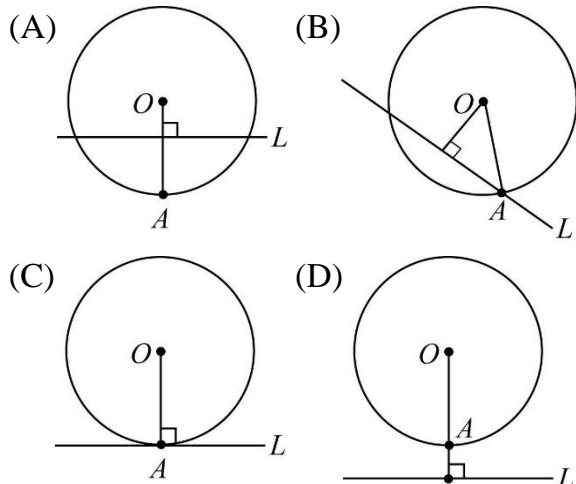


牛刀小試 16

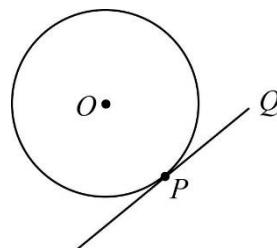
1. 當直線和圓交於一點時，
此直線就是圓的 _____，
其交點就是 _____，
如右圖，切線是 _____，切點是 _____。



2. 下列哪個圖形是直線 L 與圓 O 相切？



3. 已知 \overleftrightarrow{PQ} 和圓相切，則



- (1) P 是 _____，連接 \overline{OP} 。
(2) \overline{OP} 和 \overleftrightarrow{PQ} 互相垂直，
所以 $\angle OPQ =$ _____ 度。
(3) $\overline{OP} = 6$ ，則圓 O 半徑是 _____
即圓心到切線的距離
就是圓 O 的 _____。

4. 已知 \overleftrightarrow{PQ} 和圓 O 相切，且 P 是切點，圓心到切線的距離是 7

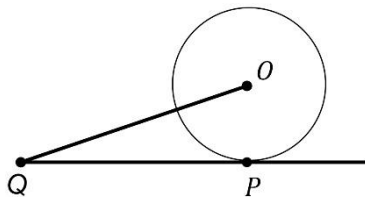
- (1) $\overline{OP} =$ _____
(2) 圓 O 的半徑 = _____



例題 5 切線性質的應用



如圖，直線 \overline{PQ} 是切線， P 是切點，若圓 O 半徑是 5， $\overline{PQ} = 12$ ，求 $\overline{OQ} = ?$

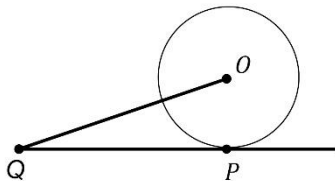


☆筆記

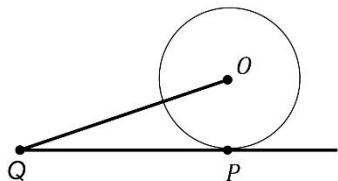


牛刀小試 17

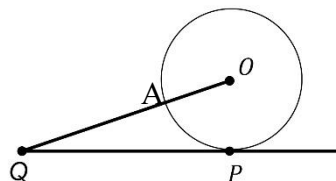
1. 如圖，直線 \overline{PQ} 是切線， P 是切點。若圓 O 半徑是 6， $\overline{PQ} = 8$ ，求 $\overline{OQ} = \underline{\hspace{2cm}}$



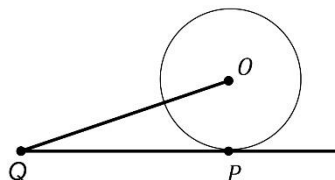
2. 如圖，直線 \overline{PQ} 是切線， P 是切點。
若 $\overline{PQ} = 4$ ， $\overline{OQ} = 5$ ，求
(1) $\overline{OP} = \underline{\hspace{2cm}}$
(2) 圓 O 半徑 = $\underline{\hspace{2cm}}$



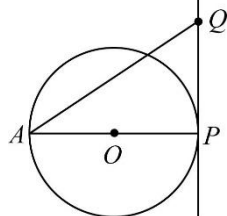
3. 如圖，直線 \overline{PQ} 是切線， P 是切點。
若 $\overline{PQ} = 15$ ， $\overline{OQ} = 17$ ，求 (1) $\overline{OP} = \underline{\hspace{2cm}}$
(2) 圓 O 半徑 = $\underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\overline{QA} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 如圖直線 \overline{PQ} 是切線， P 切點。若圓 O 半徑是 5， $\overline{OQ} = 13$ ，則 $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



5. 如圖，直線 \overline{PQ} 是切線， P 是切點。若圓 O 半徑是 4， $\overline{AQ} = 17$ ，求 $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

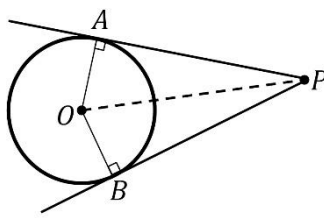




☆ 如圖， P 是圓 O 外一點， \overleftrightarrow{PA} 和 \overleftrightarrow{PB} 是切線
連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP}

請問：

1. $\triangle PAO$ 和 $\triangle PBO$ 是否會全等？
為什麼？
2. 四邊形 $PAOB$ 是_____形

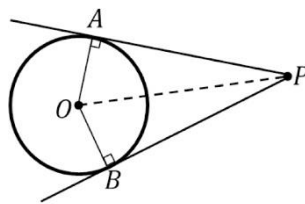


☆筆記



整理：通過圓 O 外一點 P ，畫圓的兩條切線
我們可以得到：

- ① _____
- ② _____
- ③ _____
- ④ _____
- ⑤ _____



牛刀小試 18

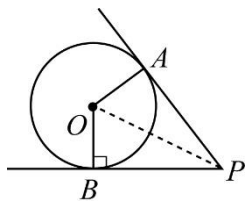
1. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overleftrightarrow{PA} 和 \overleftrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，已知

$$\overline{OA} = 3, \overline{OP} = 5$$

(1) $\overline{PA} =$ _____

(2) $\overline{PB} =$ _____

(3) 四邊形 $PAOB$ 的面積是 _____

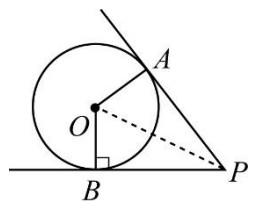


3. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overleftrightarrow{PA} 和 \overleftrightarrow{PB} 是切線，
連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，已知 $\angle APO = 30^\circ$

(1) $\angle BPO =$ _____

(2) $\angle APB =$ _____

(3) $\angle AOB =$ _____



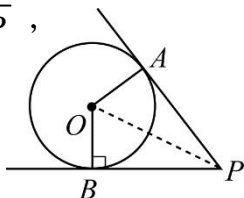
2. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overleftrightarrow{PA} 和 \overleftrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，

已知 $\overline{OA} = 5, \overline{OP} = 13$

(1) $\overline{PA} =$ _____

(2) 四邊形 $PAOB$ 的周長為 _____

(3) 四邊形 $PAOB$ 的面積是 _____

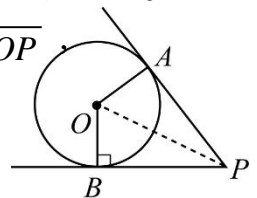


4. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overleftrightarrow{PA} 和 \overleftrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，

已知 $\angle AOB = 150^\circ$

(1) $\angle AOP =$ _____

(2) $\angle APB =$ _____





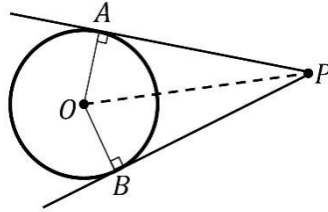
例題 6 通過圓外一點畫切線的應用



如圖， P 是圓 O 外一點， \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP}

已知：圓 O 半徑是 1， $\overline{OP} = 2$ ，求

- (1) $\overline{PA} = ?$
- (2) $\angle APB = ?$
- (3) $\angle AOB = ?$



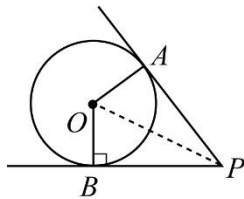
☆筆記



牛刀小試 19

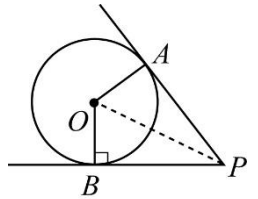
1. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，已知圓 O 半徑是 3， $\overline{OP} = 6$ ，求

- (1) $\overline{PA} =$ _____
- (2) $\angle APB =$ _____
- (3) $\angle AOB =$ _____



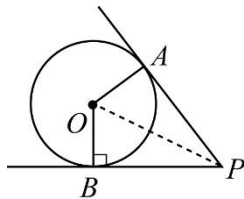
3. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，已知 $\angle APB = 60^\circ$ ， $\overline{OP} = 12$ ，求

- (1) $\angle AOP =$ _____
- (2) 圓 O 半徑 = _____
- (3) $\overline{PA} =$ _____



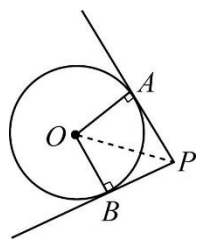
2. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，已知圓 O 半徑是 4， $\overline{OP} = 8$ ，求

- (1) $\overline{PA} =$ _____
- (2) $\angle APB =$ _____
- (3) $\angle AOB =$ _____



4. 如圖， P 是圓 O 外一點 \overrightarrow{PA} 和 \overrightarrow{PB} 是切線，連接 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OP} ，已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ，圓 O 半徑是 7，求

- (1) $\angle AOP =$ _____
- (2) $\overline{AP} =$ _____
- (3) $\overline{OP} =$ _____





解 答 篇

牛刀小試 1

1. (1) 圓心 (2) 半徑 (3) 圓周
2. 略

牛刀小試 2

1.
(1) \overline{AB} 、 \overline{CD} 、 \overline{EF}
(2) \overline{OQ} 、 \overline{OE} 、 \overline{OF}
(3) \overline{EF}
(4) \overline{OQ} 、 \overline{GH}
2.
(1) \widehat{ADB} (或 \widehat{ACB})
(2) \widehat{AB}
(3) $\widehat{ADB} > \widehat{AC} > \widehat{AB}$

牛刀小試 3

1. (1) 弓形 (2) 扇形 (3) 略
2.
(1) B 、 C 、 D
(2) D 、 E 、 F
3. (1) 半徑 (2) 弦 (3) 扇形，弓形

牛刀小試 4

1.
(1) 周長 6π ；面積 9π
(2) 周長 8π ；面積 16π
2.

幾分之幾的圓	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
圓心角度數	45°	120°
弧長	$\frac{1}{4}\pi$	6π
扇形面積	$\frac{1}{8}\pi$	27π

牛刀小試 5

1.
(1) $\frac{1}{4}$
(2) $\frac{5}{2}\pi$
(3) $\frac{25}{4}\pi$
2.
(1) $\frac{1}{3}$
(2) 4π
(3) 12π
3.
(1) 10π
(2) 45π

(3) $10\pi + 18$

4.
(1) $\frac{25}{3}\pi$
(2) $\frac{125}{3}\pi$
(3) $\frac{25}{3}\pi + 20$

牛刀小試 6

1. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 60° (3) $\frac{27}{2}\pi$
2. (1) $\frac{1}{5}$ (2) 72° (3) 80π
3. (1) 180° (2) 50π
4. (1) 45° (2) 50π
5. (1) $\frac{1}{8}$ (2) 45° (3) 2π
6. (1) $\frac{1}{9}$ (2) 40° (3) $\frac{8}{3}\pi$

牛刀小試 7

1. 周長： $\frac{10}{3}\pi + 10$ ，
面積： $\frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}$
2. 周長： $2\pi + 6$ ，面積： $6\pi - 9\sqrt{3}$
3. 周長： $\pi + 2\sqrt{2}$ ，面積： $\pi - 2$
4. 周長： $2\pi + 4\sqrt{2}$ ，面積： $4\pi - 8$

牛刀小試 8

1.
(1) A ， B
(2) C ， D
(3) E
2.
(1) P ， Q ， R ， O
(2) V ， S
(3) T ， U

3.

	與圓的關係	與半徑 r 的關係
P 點	圓內	$< r$
B 點	圓上	$= r$
C 點	圓外	$> r$

4.
(1) B
(2) C
5. $4 < r < 7$
6.
(1) 3
(2) $3 < r < 4$
(3) 4
(4) $4 < r < 5$

牛刀小試 9

1.

2	1	0
$D < r$	$D = r$	$D > r$
割線	切線	不相交的直線

2.
(1) L_4 ， L_5
(2) L_3
(3) L_1 ， L_2
3.
(1) L
(2) M
(3) N
(4) M
(5) L
(6) A
4. 8
5. 2

牛刀小試 10

1.

2.
(1) 無限多條
(2)

3.
(1) \overline{AB}
(2) \overline{OE}
(3) 弦心距

4.

- (1) 8
(2) 0

牛刀小試 11

1.
(1) 4
(2) 3
2.
(1) 6
(2) 8
3.
(1) 30
(2) 16
4.
(1) 4

(2) 5

牛刀小試 12

1.

(1) 5

(2) 5

(3) 會

2.

(1) 4

(2) 8

(3) 8

(4) 會

3.

(1) 8

(2) 16

(3) 16

牛刀小試 13

1. (1) 3、4

(2) $\overline{OM} < \overline{ON}$

2. (1) 6、8 (2) $\overline{OM} < \overline{ON}$

3.

$\overline{OD} > \overline{OE} > \overline{OF}$

4.

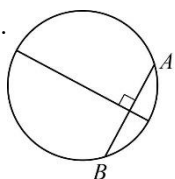
(1) 8

(2) 6

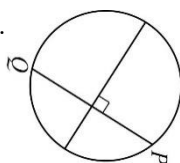
(3) 2

牛刀小試 14

1.

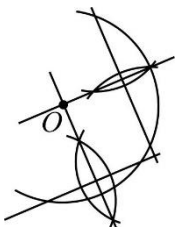


2.

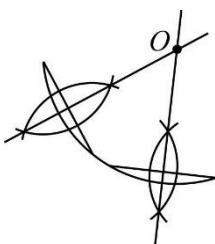


牛刀小試 15

1.



2.



牛刀小試 16

1. 切線，切點， L_2 ，A

2. (C)

3.

(1) 切點

(2) 90°

(3) 6，半徑

4.

(1) 7

(2) 7

牛刀小試 17

1. 10

2.

(1) 3

(2) 3

3..

(1) 8

(2) 8

(3) 9

4. 12

5. 15

牛刀小試 18

1.

(1) 4

(2) 4

(3) 12

2.

(1) 12

(2) 34

(3) 60

3.

(1) 30°

(2) 60°

(3) 120°

4.

(1) 75°

(2) 30°

牛刀小試 19

1.

(1) $3\sqrt{3}$

(2) 60°

(3) 120°

2.

(1) $4\sqrt{3}$

(2) 60°

(3) 120°

3.

(1) 60°

(2) 6

(3) $6\sqrt{3}$

4.

(1) 45°

(2) 7

(3) $7\sqrt{2}$



B5 2-2 弧與圓周角



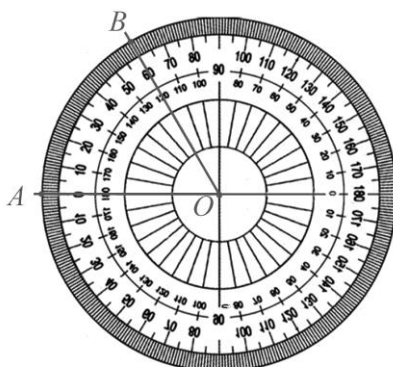
概念 ① 弧的度數



☆弧有度數嗎？

如果我們把兩個量角器拼成一個圓，我們可以發現量角器上面的小刻度把外緣的圓周分成_____等分每一等分弧的度數就是_____。

也就是說，這個弧占整個圓周的比例是_____。



☆筆記

\widehat{AB} 的意思

☆你用過量角器嗎？

請問： $\angle AOB =$ _____度

\widehat{AB} 的度數 = _____ 的度數 = _____ 度

意思是 \widehat{AB} 佔整個圓周的_____。

☆ $\angle AOB$ 是 _____ 角

☆整理：

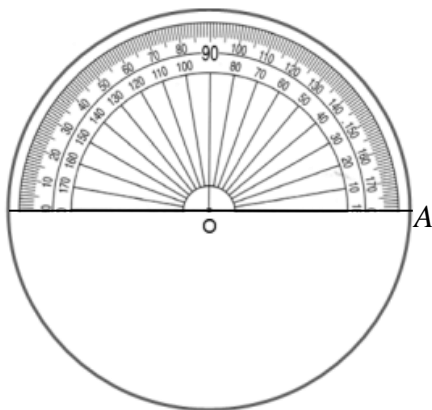
弧的度數 = _____ = _____



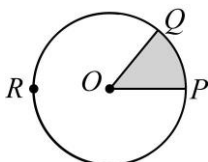
牛刀小試 ①

1. 請在下圖，畫出圓心角 $\angle AOB = 150^\circ$ ，

求 \widehat{AB} 度數。



2. 已知圓心角 $\angle POQ = 50^\circ$ ，求 \widehat{PQ} 和 \widehat{PRQ} 的度數。

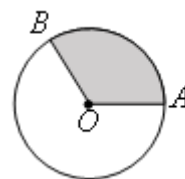


3. 已知 \widehat{AB} 的度數是 120°

(1) \widehat{AB} 佔整個圓周的_____。

(2) 圓心角 $\angle AOB =$ _____。

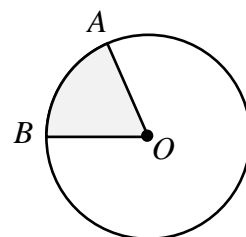
(1) 提示： $\frac{120}{360}$



4. 已知 \widehat{AB} 的度數是 40°

(1) \widehat{AB} 佔整個圓周的_____。

(2) 圓心角 $\angle AOB =$ _____。



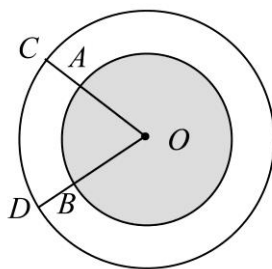


例題 1 弧的度數和長度



如圖，兩同心圓的圓心為 O ，
且半徑分別是 6 和 9，
已知： $\angle AOB = 60^\circ$

- 求：(1) \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 的度數
(2) \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 的長度



☆筆記

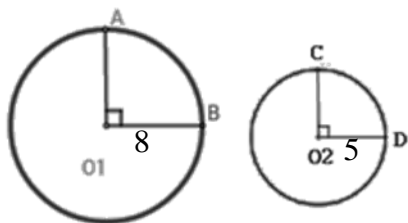
圓周長 = _____

圓面積 = _____



牛刀小試 2

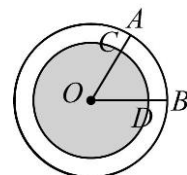
1. 求 \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 度數與長度。



2. 承上題，若 \widehat{AB} 的度數 = \widehat{CD} 的度數
則 (1) \widehat{AB} 的長度和 \widehat{CD} 的長度是否相等？
為什麼？
(2) \widehat{AB} 的長度： \widehat{CD} 的長度比 = ?

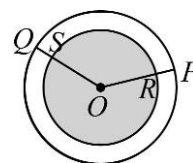
3. 兩同心圓圓心為 O ，半徑各為 3 和 6，
已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ，求

- (1) \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 的度數。
(2) \widehat{AB} 、 \widehat{CD} 的長度。



4. 兩同心圓圓心為 O ，半徑各為 5 和 7，
已知 $\angle POQ = 120^\circ$ ，求

- (1) \widehat{PQ} 、 \widehat{RS} 的度數。
(2) \widehat{PQ} 、 \widehat{RS} 的長度。





☆如圖，在圓 O 中

如果 \widehat{AB} 的度數 $= \widehat{CD}$ 的度數

請問：弦 \overline{AB} 和弦 \overline{CD} 會相等嗎？

為什麼？

1. $\because \widehat{AB}$ 的度數 $= \widehat{CD}$ 的度數

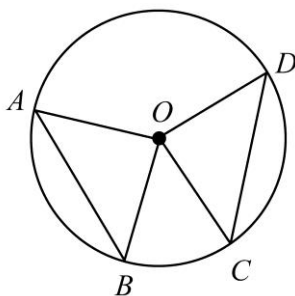
\therefore _____

2. $\because \overline{OA} =$ _____ (圓 O 的 _____)

$\overline{OB} =$ _____

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle$ _____ (_____ 全等性質)

\Rightarrow _____



☆筆記

在同圓或等圓中

如果弦 $\overline{AB} = \text{弦 } \overline{CD}$ ，請問

(1) \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 的度數是否相等？
為什麼？

(2) \widehat{AB} 和 \widehat{CD} 的長度是否相等？
為什麼？

☆整理：在同圓或等圓中

等圓心角 \Rightarrow _____ \Rightarrow _____

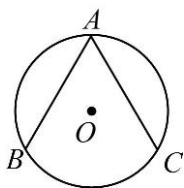


牛刀小試 3

1. 等弧對等弦

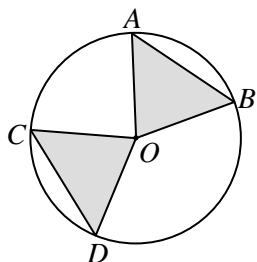
已知 \widehat{AB} 的度數 $= \widehat{AC}$ 的度數 $= 130^\circ$ ，

若弦 $\overline{AC} = 10$ ，則弦 $\overline{AB} =$ _____。



2. 已知圓 O 中 \widehat{AB} 的度數 $= \widehat{CD}$ 的度數 $= 70^\circ$

若弦 $\overline{CD} = 9$ ，則弦 $\overline{AB} =$ _____。



3. 等弦對等弧

在圖 O 中，若弦 $\overline{AB} = \text{弦 } \overline{CD}$ ，

則 \widehat{AB} 的度數會等於 \widehat{CD} 的度數嗎？

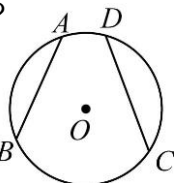
$\because \text{弦 } \overline{AB} = \text{弦 } \overline{CD}$ ，

且 $\overline{OA} =$ _____， $\overline{OB} =$ _____。

$\therefore \triangle OAB \cong \triangle$ _____ (_____ 全等)

$\Rightarrow \angle AOB =$ _____。

$\Rightarrow \widehat{AB} =$ _____。



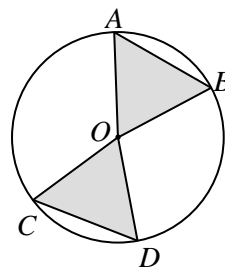
4. 已知圓 O 中，弦 $\overline{AB} = \text{弦 } \overline{CD}$

(1) 若 \widehat{AB} 的度數 $= 45^\circ$ ，

則 \widehat{CD} 度數 $=$ _____ 度。

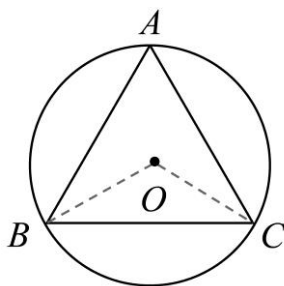
(2) 若 \widehat{AB} 的長度 $= 2\pi$ ，

則 \widehat{CD} 的長度 $=$ _____。



**例題****②****等弦對等弧**

已知： $\triangle ABC$ 是正 \triangle
 請問： $\angle BOC$ 的度數？



☆筆記

**牛刀小試****4**

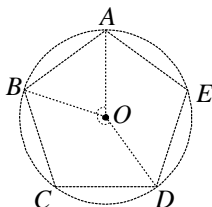
1. 正五邊形 $ABCDE$ 的頂點皆在圓 O 上，則

(1) $\widehat{AB} =$ _____ 度。

(2) $\angle AOB =$ _____ 度。

(3) $\widehat{BCD} =$ _____ 度。

(4) $\angle BOD =$ _____ 度。



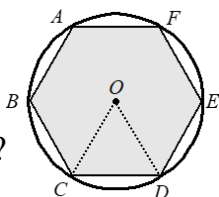
2. 正六邊形 $ABCDEF$ 的頂點均在圓 O 上，

求(1) $\angle COD$ 的度數=_____度

(2) \widehat{ABC} 的度數=_____度

\widehat{AFE} 的度數=_____度

(3) 弦 \overline{AC} 和弦 \overline{AE} 相等嗎？



3. 若 \widehat{AC} 的度數 $= \widehat{BD}$ 的度數 $= 50^\circ$ ，

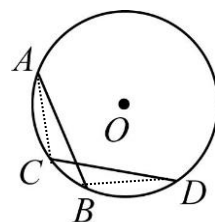
(1) 當弦 $\overline{AC} = 10$ ，則弦 $\overline{BD} =$ _____

(2) $\overline{AB} = \overline{CD}$ 成立嗎？

$\because \widehat{AC} = \widehat{BD} \therefore \overline{AC} =$ _____

推得 $\widehat{ACB} =$ _____，

故 $\overline{AB} =$ _____ 成立。



(3) 已知 \widehat{AC} 的度數 $= \widehat{BD}$ 的度數

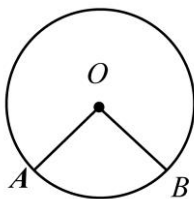
若 $\overline{AB} = 18$ ，則 $\overline{CD} =$ _____。



☆**複習**：什麼是圓心角？

頂點在_____

角的兩邊是_____



☆**筆記**

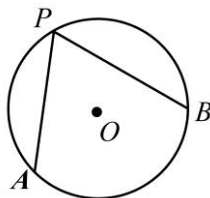
☆什麼是圓周角？

頂點在_____

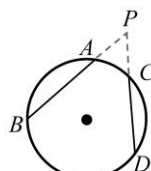
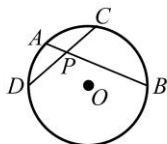
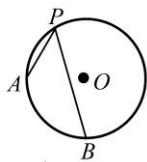
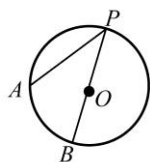
角的兩邊是_____

圓周角 $\angle APB$ 所對的弧是_____

所對的弦是_____



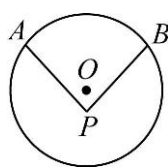
☆ $\angle P$ 是不是圓周角？



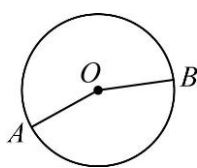
1. 如果是圓心角，請打○；

如果是圓周角，請打✓；

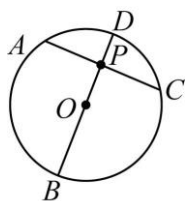
如果兩個都不是，請打×。



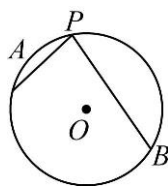
(1) _____



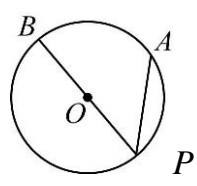
(2) _____



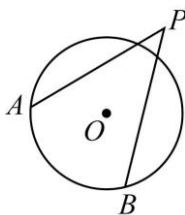
(3) _____



(4) _____



(5) _____

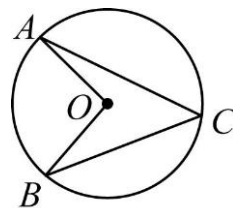


(6) _____

2. 圖中，

圓心角是_____。

圓周角是_____。



3. 圖中

(1) $\angle ABC$ 所對的弧是_____。

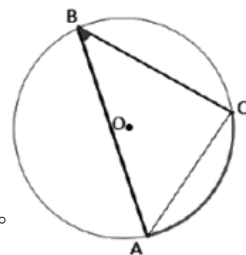
所對的弦是_____。

(2) $\angle ACB$ 所對的弧是_____。

所對的弦是_____。

(3) $\angle BAC$ 所對的弧是_____。

所對的弦是_____。

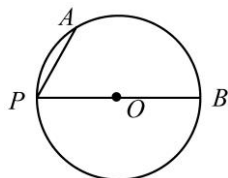




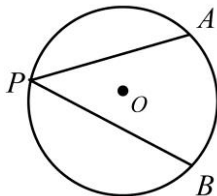
☆圓周角和所對的弧的度數有沒有關聯呢？

我們依照圓心的位置分成三種情形討論：

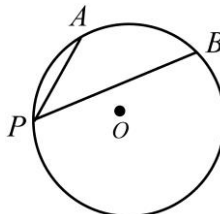
①圓心在圓周角的一邊



②圓心在圓周角內



③圓心在圓周角外



☆筆記

圓心角的度數



☆整理：

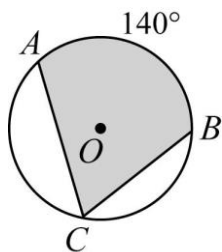
圓周角的度數=_____



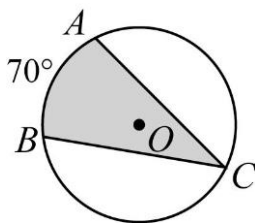
牛刀小試 6

1. 求出下列圓周角的度數。

(1)

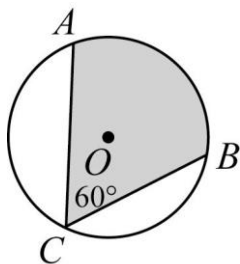


(2)

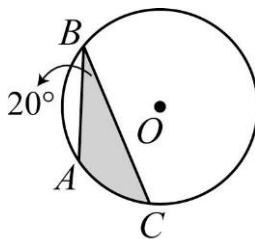


2. 求出下列圓周角所對應的弧的度數。

(1)



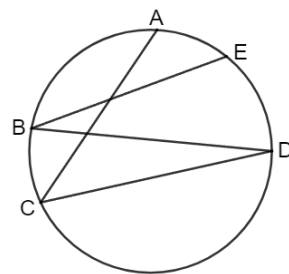
(2)



3. 如圖， $\widehat{AE} = 30^\circ$ ， $\angle ACD = 50^\circ$ ，則

(1) $\angle AED =$ _____ 度。

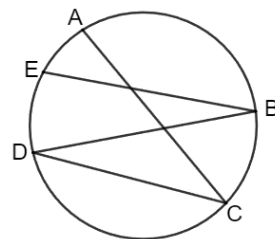
(2) $\angle EBD =$ _____ 度。



4. 如圖， $\widehat{AE} = 30^\circ$ ， $\angle ACD = 40^\circ$ ，則

(1) $\widehat{AD} =$ _____ 度。

(2) $\angle EBD =$ _____ 度。



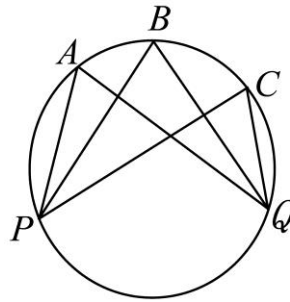


例題 ③ 對同弧的圓周角



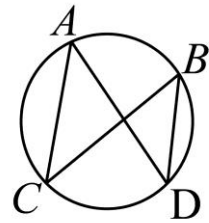
已知： $\angle A = 55^\circ$

請問： $\angle B = ?$ $\angle C = ?$



☆筆記

圓內的蝴蝶形

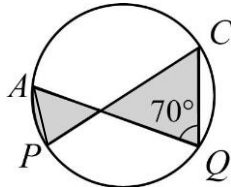


☆對同弧的圓周角_____

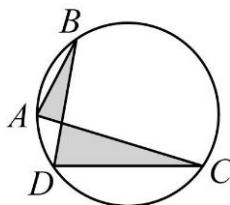


牛刀小試 7

1. 已知 $\angle Q = 70^\circ$ ，求 \widehat{AC} 和 $\angle APC$ 的度數。



2. 已知 $\widehat{BC} = 150^\circ$ ，求 $\angle BAC$ 和 $\angle BDC$ 的度數。



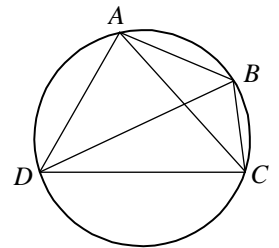
3. 若 $\angle ACB = 30^\circ$ ， $\widehat{AD} = 110^\circ$ ，則

(1) $\widehat{AB} =$ _____ 度。

(2) $\angle ADB =$ _____ 度。

(3) $\angle ABD =$ _____ 度。

(4) $\angle BCD =$ _____ 度。

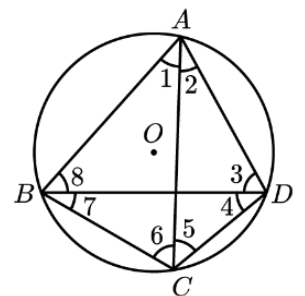


4. 圖中角的相等關係分別為： $\angle 1 = \angle 4$ ，

(1) $\angle 2 = \angle$ _____。

(2) $\angle 3 = \angle$ _____。

(3) $\angle 8 = \angle$ _____。



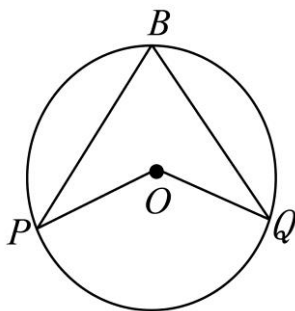


例題 4 對同弧的圓心角與圓周角



已知： $\angle B = 55^\circ$

請問： $\angle POQ = ?$



☆筆記

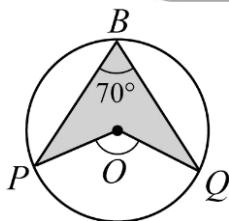


☆對同弧的圓心角是_____

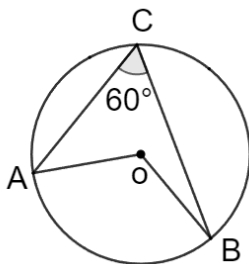


牛刀小試 8

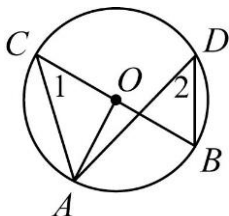
1. 已知 $\angle B = 70^\circ$ ，
求 $\angle POQ =$ _____ 度。



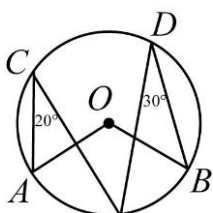
2. 已知 $\angle C = 60^\circ$ ，
求 $\angle AOB =$ _____ 度。



3. 已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ，
求 $\widehat{AB} =$ _____ 度。
 $\angle 1 =$ _____ 度。
 $\angle 2 =$ _____ 度。

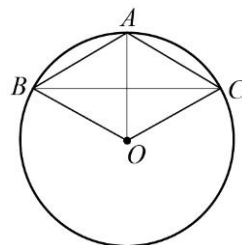


- 4 如圖，
求 $\angle AOB =$ _____ 度。



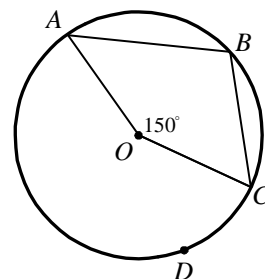
5. 如右圖，A、B、C 三點都在圓 O 上，
 $\angle AOB = 60^\circ$ ，則

- (1) $\widehat{AB} =$ _____ 度。
(2) $\angle ACB =$ _____ 度。
(3) $\angle OBA =$ _____ 度。



6. 如圖，A、B、C、D 四點都在圓 O 上，
 $\angle AOC = 150^\circ$ ，則

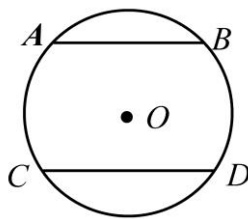
- (1) $\widehat{ABC} =$ _____ 度。
(2) $\widehat{ADC} =$ _____ 度。
(3) $\angle B =$ _____ 度。





☆已知： \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦，若 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

請說明 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

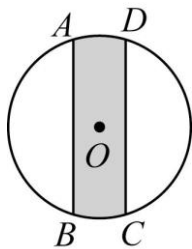


☆筆記

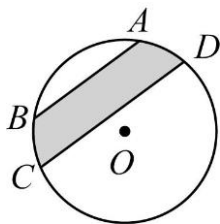


牛刀小試 9

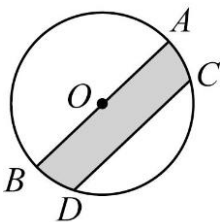
1. 已知 \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，
若 $\widehat{AD} = 20^\circ$ ，則 $\widehat{BC} =$ _____度。



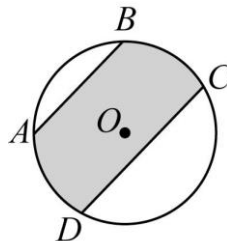
2. 已知 \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，
若 $\widehat{BC} = 30^\circ$ ，則 $\widehat{AD} =$ _____度。



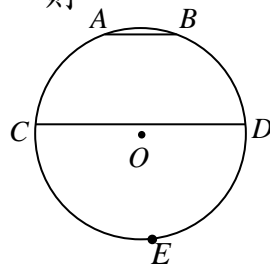
3. 已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 $\widehat{AC} = 48^\circ$ ，則
 $\widehat{BD} =$ _____度。



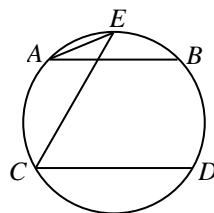
4. 已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 $\widehat{CD} = 126^\circ$ ， $\widehat{AD} = 75^\circ$ ，
求 $\widehat{AB} =$ _____度。



5. 已知 \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，
若 $\widehat{AB} = 30^\circ$ ， $\widehat{CED} = 190^\circ$ ，則
 $\widehat{BD} =$ _____度。



6. 已知A、B、C、D、E為圓O上相異五點，
且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 $\angle AEC = 35^\circ$ ，則
 $\widehat{BD} =$ _____度。





例題 5 平行線截等弧

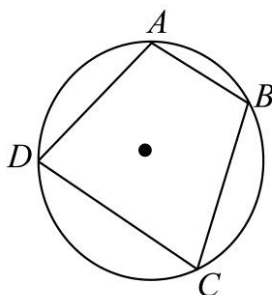


☆已知： \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

若 $\widehat{AB} = 40^\circ$ ， $\widehat{CD} = 130^\circ$

求：(1) $\widehat{AD} =$ _____ 度， $\widehat{BC} =$ _____ 度

(2) $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 各是幾度？



☆筆記



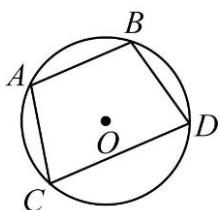
☆四邊形 $ABCD$ 是 _____ 形



牛刀小試 10

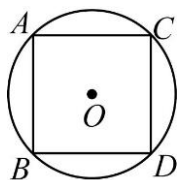
1. 已知 \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦，
且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 $\widehat{AB} = 68^\circ$ ，
 $\widehat{CD} = 132^\circ$ ，則

- (1) $\widehat{AC} =$ _____ 度。
(2) $\widehat{BD} =$ _____ 度。
(3) 求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 。



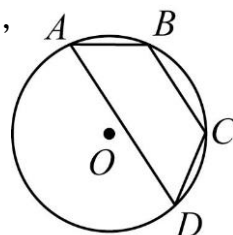
2. 已知 \overline{AB} 、 \overline{CD} 是圓的兩弦，
且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 $\widehat{AB} = 94^\circ$ ，
 $\widehat{CD} = 98^\circ$ ，則

- (1) $\widehat{AC} =$ _____ 度
 $\widehat{BD} =$ _____ 度
(2) 求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 。



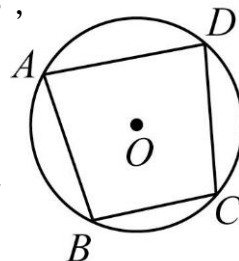
3. 已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\widehat{BC} = 68^\circ$ ，
 $\widehat{AB} = 50^\circ$ 。

- (1) 求 $\widehat{AD} =$ _____ 度
(2) 若 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ，則
 $\overline{CD} =$ _____
(3) 四邊形 $ABCD$ 是 _____ 形



4. 已知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，若 $\widehat{AB} = 90^\circ$ ，
 $\widehat{AD} = 120^\circ$ 。

- (1) 求 $\widehat{BC} =$ _____ 度
(2) 若 $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AD} = 9$ ，則
 $\overline{CD} =$ _____
(3) 四邊形 $ABCD$ 是 _____ 形





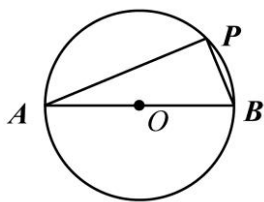
☆已知： \overline{AB} 是圓 O 的直徑， P 為圓 O 上一點

請問：(1) $\angle P$ 是_____角

(2) $\angle P$ 所對的弧是_____

(3) $\angle P =$ _____度

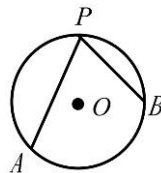
(4) 請在上圖中畫出兩個和 $\angle P$ 相等的角



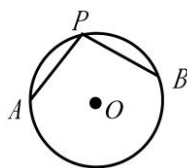
☆筆記

已知： $\angle P$ 是圓周角，判斷 $\angle P$ 是直角、銳角或是鈍角，為什麼？

①



②



☆整理：

① 半圓的圓周角是_____度

② 90° 的圓周角所對的弧是_____

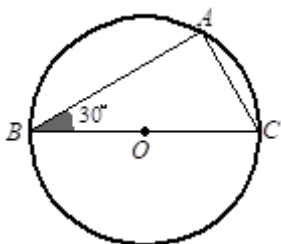
③ 90° 的圓周角所對的弦是_____



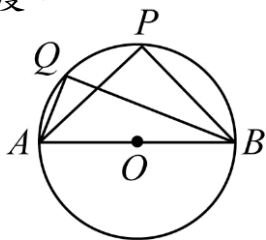
牛刀小試 11

1. \overline{BC} 為圓 O 的直徑。已知 $\angle B = 30^\circ$ ，

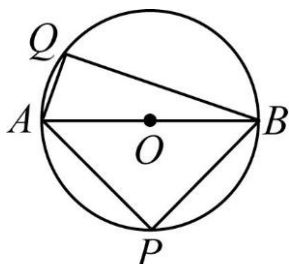
則 $\angle A =$ _____度。



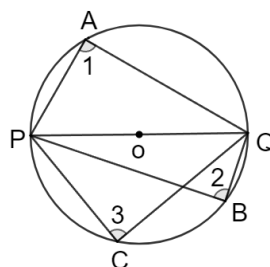
2. 已知 \overline{AB} 為直徑，則 $\angle P$ 為_____角（鈍、銳、直）， $\angle Q =$ _____度。



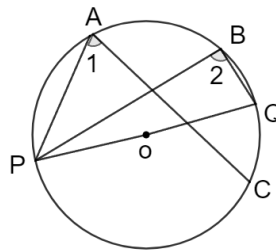
3. 已知 $\angle APB = 90^\circ$ ，則 \overline{AB} 為_____， $\angle P$ 和 $\angle Q$ 一樣大嗎？



4. 請比較 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 大小。

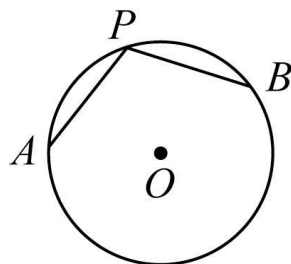


5. 請比較 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 大小。



6. (1) \overline{AB} 是否為直徑？

(2) $\angle P$ 為_____角（鈍、銳、直）





例題 6 半圓的圓周角都是 90°



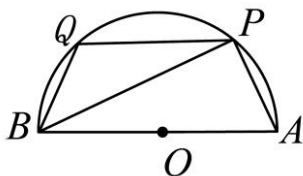
如圖： O 為圓心， AB 是直徑， P 、 Q 兩點在圓周上，

已知： $\angle A = 70^\circ$

請問：(1) $\angle P =$ _____ 度

(2) $\angle B =$ _____ 度

(3) $\angle Q =$ _____ 度



☆筆記



牛刀小試 12

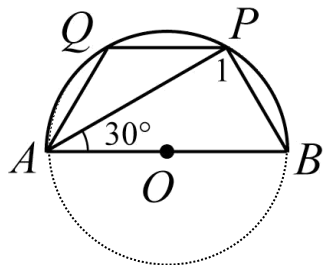
1. O 為圓心， \overline{AB} 為直徑， P 、 Q 在圓上。

已知 $\angle PAB = 30^\circ$ ，求：

(1) $\angle 1 =$ _____ 度。

(2) $\angle ABP =$ _____ 度。

(3) $\angle AQP =$ _____ 度。

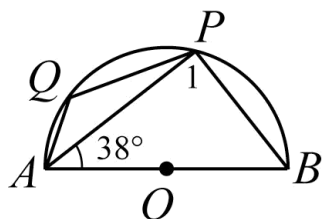


2. 已知 $\angle PAB = 38^\circ$ ，求：

(1) $\angle 1 =$ _____ 度。

(2) $\angle ABP =$ _____ 度。

(3) $\angle AQP =$ _____ 度。

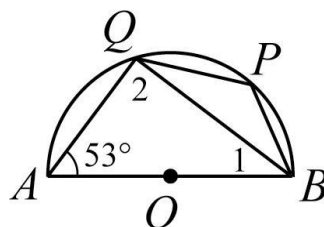


3. 已知 $\angle QAB = 53^\circ$ ，求：

(1) $\angle 2 =$ _____ 度。

(2) $\angle 1 =$ _____ 度。

(3) $\angle QPB =$ _____ 度。



4. 已知 $\angle PQB = 110^\circ$ ，求：

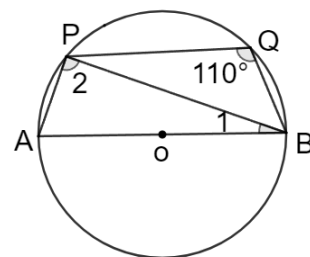
(1) $\angle 2 =$ _____ 度。

(2) $\widehat{PAB} =$ _____ 度。

(3) $\widehat{AP} =$ _____ 度。

(4) $\angle 1 =$ _____ 度。

(5) $\angle A =$ _____ 度。





概念

7 圓內接四邊形



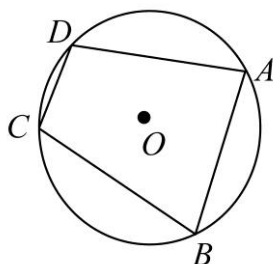
☆若四邊形 $ABCD$ 的頂點都在圓 O 上，
我們說四邊形 $ABCD$ 是_____

☆ $\angle A + \angle C =$ _____度，為什麼？

$\angle A =$ _____ $\angle C =$ _____

$\angle A + \angle C =$ _____

同理 $\angle B + \angle D =$ _____



☆筆記



☆圓內接四邊形 \Rightarrow _____

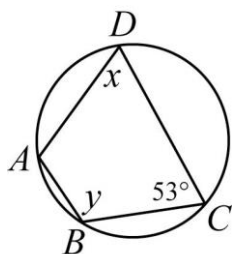


牛刀小試 13

若四邊形 $ABCD$ 的頂點都在圓 O 上，

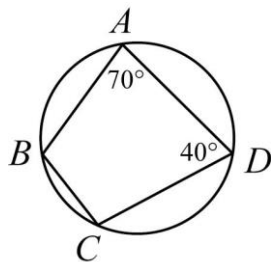
1. 求 $(1) x + y =$ _____度。

$(2) \angle A =$ _____度。



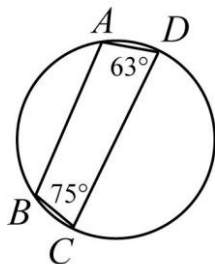
2. 求 $\angle B =$ _____度。

$\angle C =$ _____度。



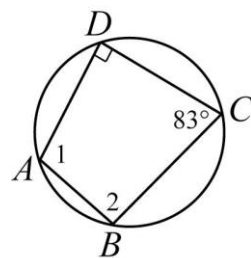
3. 求 $\angle A =$ _____度。

$\angle B =$ _____度。



4. 求 $\angle 1 =$ _____度。

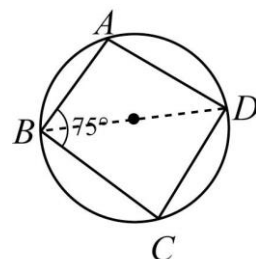
$\angle 2 =$ _____度。



5. 求 $\angle A =$ _____度。

$\angle C =$ _____度。

$\angle D =$ _____度。



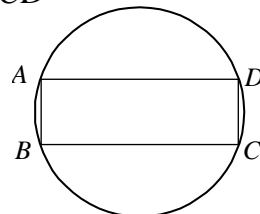
6. 如圖，若圓內接四邊形 $ABCD$

為長方形，且 $\widehat{AB} = 35^\circ$ ，則

(1) $\widehat{AD} =$ _____度。

(2) 連 \overline{BD} ， \overline{BD} 是直徑嗎？

為什麼？





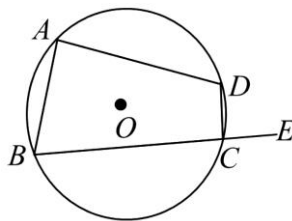
例題 7 圓內接四邊形對角互補



已知：四邊形 $ABCD$ 是圓內接四邊形， $\angle A = 80^\circ$

求：(1) $\angle BCD =$ _____ 度

(2) $\angle DCE =$ _____ 度



☆筆記

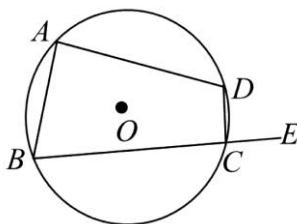


☆整理：若四邊形 $ABCD$ 是圓內接四邊形

① $\angle A + \angle BCD =$ _____

② $\angle B + \angle D =$ _____

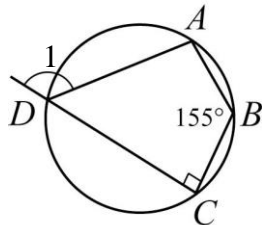
③ $\angle DCE =$ _____



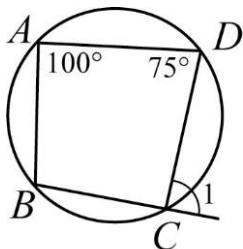
牛刀小試 14

1. 求 $\angle A$ 、 $\angle 1$ 。

(提示： $\angle 1 + \angle D = 180^\circ$)

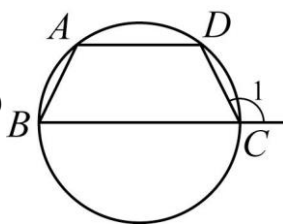


2. 求 $\angle B$ 、 $\angle 1$ 。

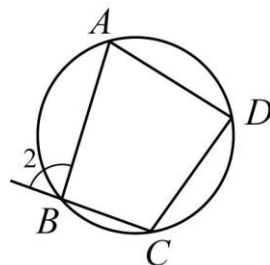


3. $\angle 1 =$ _____

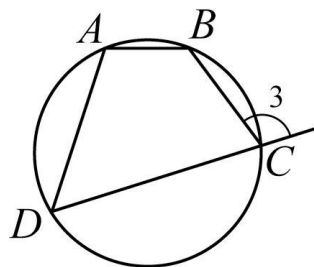
(填入 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 或 $\angle D$)



4. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，若 $\angle 2 = 105^\circ$ ， $\angle C = 100^\circ$ ，求 $\angle A$ 和 $\angle D$ 。



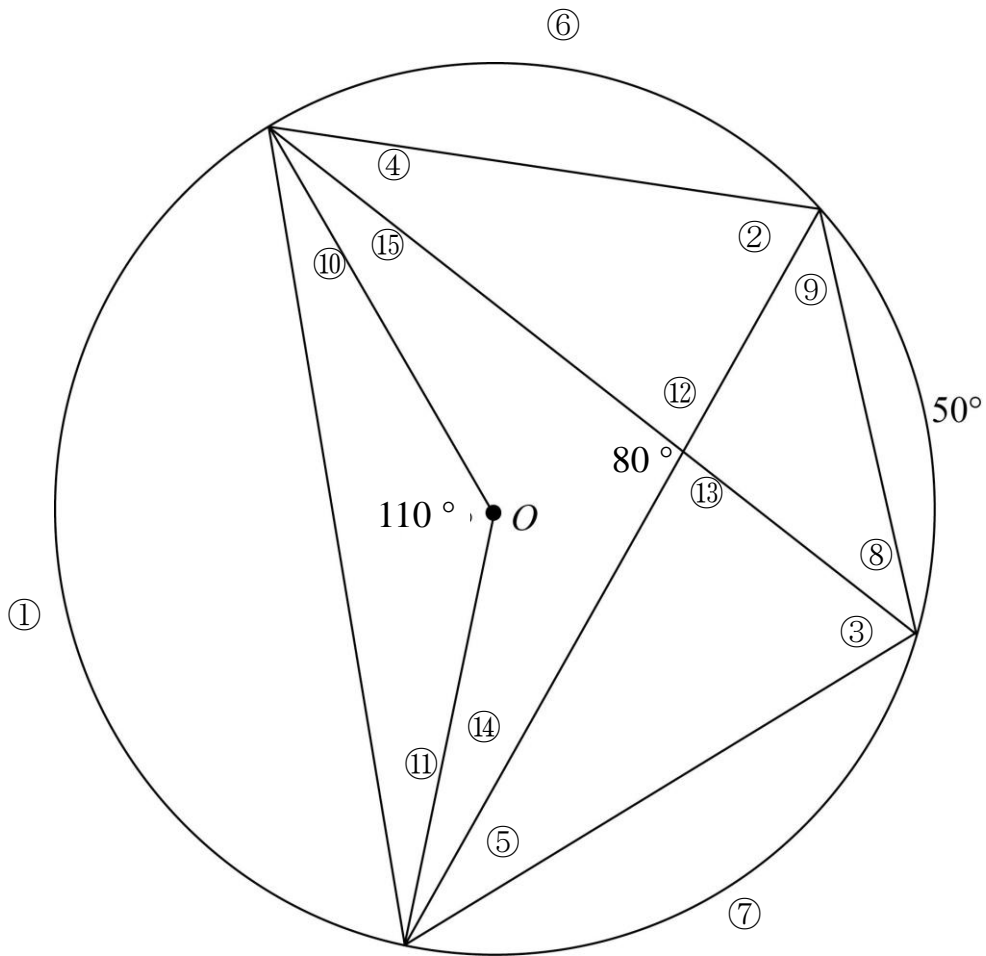
5. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，若 $\angle 3 = 130^\circ$ ， $\angle B = 140^\circ$ ，求 $\angle A$ 和 $\angle D$ 。





牛刀小試 15

已知：⑥=⑦，請你試試看推導出圖中各個度數吧！



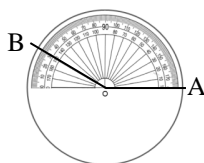
①	②	③	④	⑤
⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
⑪	⑫	⑬	⑭	⑮



解 答 篇

牛刀小試 1

1.



$$\widehat{AB} = 150^\circ$$

$$2. \widehat{PQ} = 50^\circ, \widehat{PRQ} = 310^\circ$$

$$3. \frac{1}{3}, 120^\circ$$

$$4. \frac{1}{9}, 40^\circ$$

牛刀小試 2

$$1. (1) \widehat{AB} \text{ 的度數} = 90^\circ, \text{長度} = 4\pi$$

$$\widehat{CD} \text{ 的度數} = 90^\circ, \text{長度} = \frac{5}{2}\pi$$

2. (1) 不相等，因為半徑不相等

$$(2) \widehat{AB} : \widehat{CD} = 8:5$$

$$3. (1) 60^\circ, 60^\circ$$

$$(2) 2\pi, \pi$$

$$4. (1) 120^\circ, 120^\circ$$

$$(2) \frac{14}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi$$

牛刀小試 3

$$1. 10$$

$$2. 9$$

$$3. \overline{OC}, \overline{OD}, \triangle OCD \text{ (SSS)},$$

$$\angle COD, \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

$$4. (1) 45 (2) 2\pi$$

牛刀小試 4

$$1. (1) 72^\circ (2) 72^\circ$$

$$(3) 144^\circ (4) 144^\circ$$

$$2. (1) 60^\circ (2) 120^\circ, 120^\circ$$

(3) 相等

$$3. (1) 10$$

$$(2) \overline{BD}, \widehat{CBD}, \overline{CD}$$

$$(3) 18$$

牛刀小試 5

$$1. \times, \bigcirc, \times, \checkmark, \checkmark, \times$$

$$2. \angle AOB, \angle ACB$$

$$3. (1) \widehat{AC}, \overline{AC}$$

$$(2) \widehat{AB}, \overline{AB}$$

$$(3) \widehat{BC}, \overline{BC}$$

牛刀小試 6

$$1. 70^\circ, 35^\circ$$

$$2. 120^\circ, 40^\circ$$

$$3. (2) 100^\circ (2) 35^\circ$$

$$4. (2) 80^\circ (2) 25^\circ$$

牛刀小試 7

$$1. 140^\circ, 70^\circ$$

$$2. 75^\circ, 75^\circ$$

$$3. (1) 60^\circ (2) 30^\circ (3) 55^\circ (4) 85^\circ$$

$$4. (1) \angle 7 (2) \angle 6 (3) \angle 5$$

牛刀小試 8

$$1. 140^\circ$$

$$2. 120^\circ$$

$$3. 60^\circ, 30^\circ, 30^\circ$$

$$4. 100^\circ$$

$$5. (1) 60^\circ (2) 30^\circ (2) 60^\circ$$

$$6. (1) 150^\circ (2) 210^\circ (3) 105^\circ$$

牛刀小試 9

$$1. 20^\circ$$

$$2. 30^\circ$$

$$3. 48^\circ$$

$$4. 84^\circ$$

$$5. 70^\circ$$

$$6. 70^\circ$$

牛刀小試 10

$$1. 80^\circ, 80^\circ, 106^\circ, 106^\circ, 74^\circ, 74^\circ$$

$$2. 84^\circ, 84^\circ, 91^\circ, 91^\circ, 89^\circ, 89^\circ$$

$$3. (1) 192 (2) 3 (3) \text{等腰梯}$$

$$4. (1) 60 (2) 8 (3) \text{等腰梯}$$

牛刀小試 11

$$1. 90^\circ$$

$$2. \text{直}, 90$$

$$3. \text{直徑}, \text{一樣大}$$

$$4. \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$$

$$5. \angle 1 < \angle 2$$

$$6. \text{否}, \text{鈍}$$

牛刀小試 12

$$1. 90^\circ, 60^\circ, 120^\circ$$

$$2. 90^\circ, 52^\circ, 128^\circ$$

$$3. 90^\circ, 37^\circ, 127^\circ$$

$$4. 90^\circ, 220^\circ, 40^\circ, 20^\circ, 70^\circ$$

牛刀小試 13

$$1. 180^\circ, 127^\circ$$

$$2. 140^\circ, 110^\circ$$

$$3. 105^\circ, 117^\circ$$

$$4. 97^\circ, 90^\circ$$

$$5. 90^\circ, 90^\circ, 105^\circ$$

$$6. (1) 145^\circ$$

(2) 是，因為

$$\angle A = 90^\circ \text{ 度}, \widehat{BD} = 180^\circ \text{ 度}, \text{是半圓}$$

所以 \overline{BD} 是直徑

牛刀小試 14

$$1. 90^\circ, 155^\circ$$

$$2. 105^\circ, 100^\circ$$

$$3. \angle A$$

$$4. 80^\circ, 105^\circ$$

$$5. 130^\circ, 40^\circ$$

牛刀小試 15

① 110°	② 55°	③ 55°	④ 25°	⑤ 25°
⑥ 100°	⑦ 100°	⑧ 50°	⑨ 50°	⑩ 35°
⑪ 35°	⑫ 100°	⑬ 100°	⑭ 15°	⑮ 15°



B5 3-1 推理證明



概念 ① 認識證明 1



☆已知： \overline{AD} 和 \overline{BC} 相交於 O 點，

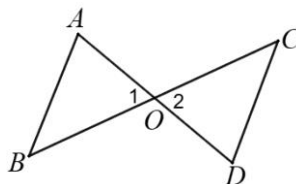
形成兩個 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$

若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，請問：

(1) $\angle 2 =$ _____ 度。

(2) $\angle A + \angle B =$ _____ 度。

(3) $\angle C + \angle D =$ _____ 度。



☆筆記

根據下面的敘述，寫出

已知和求證

等腰 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

則 $\angle B = \angle C$

已知：

求證：

☆不管 $\angle 1$ 是幾度， $\angle A + \angle B$ 都會等於 $\angle C + \angle D$ 嗎？為什麼？

已知：_____

求證：_____

證明：



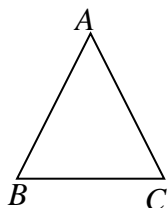
牛刀小試 1

請根據下列敘述，練習找出已知條件和求證項目。

1. $\triangle ABC$ 中，**若** $\angle B = \angle C$ ，**則** $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

(1) 已知：_____

(2) 求證：_____

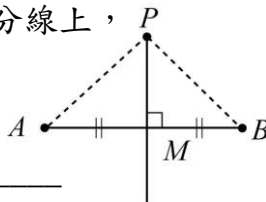


2. **若** P 點在 \overline{AB} 的垂直平分線上，

則 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

(1) 已知：_____

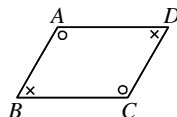
(2) 求證：_____



3. **若** $ABCD$ 為平行四邊形，**則** 對角相等。

(1) 已知：_____

(2) 求證：_____

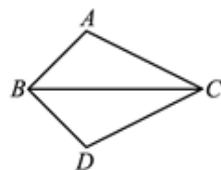


4. **若** $\overline{AB} = \overline{BD}$ ， $\angle ABC = \angle DBC$

則 $\overline{AC} = \overline{CD}$ 。

(1) 已知：_____

(2) 求證：_____

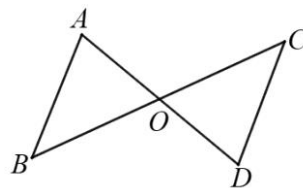




已知： \overline{AD} 和 \overline{BC} 相交於 O 點，形成兩個 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$

求證： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

證明：



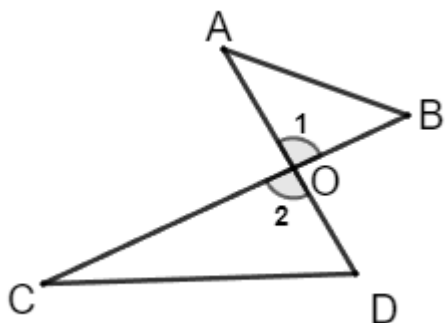
☆筆記

證明就是_____



牛刀小試 2

1. 如圖， \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 O 點，已知 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 23^\circ$ ， $\angle D = 59^\circ$ ，則 $\angle B = ?$



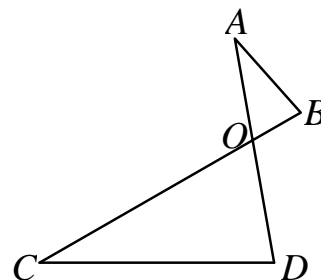
$\therefore \angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ (對頂角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle \underline{\hspace{2cm}} + \angle \underline{\hspace{2cm}}$

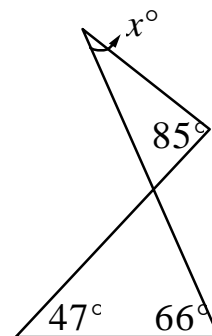
$\underline{\hspace{2cm}}^\circ + \angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ + \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

$\angle B =$

2. 如圖， \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 O 點，已知 $\angle A = 32^\circ$ ， $\angle B = 78^\circ$ ， $\angle D = 80^\circ$ ，則 $\angle C = ?$



3. 如圖，求 $x = ?$





如圖： $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， D 是 \overline{BC} 的中點

證明： \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的角平分線

思考過程

1. 證明： \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的角平分線

\Rightarrow _____

2. 已知：

① $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle

\Rightarrow _____

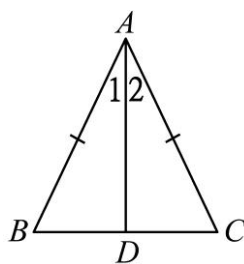
② D 是 \overline{BC} 的中點

\Rightarrow _____

③ 隱藏條件

\Rightarrow _____

3. 利用 _____ 來證明



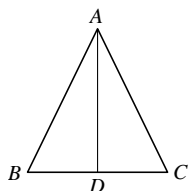
☆筆記
證明要寫什麼？



牛刀小試 3

1. 如圖： $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， D 為 \overline{BC} 的中點。

求證： $\angle B = \angle C$



思考過程

(1) 已知：

① $\triangle ABC$ 為等腰 $\triangle \Rightarrow$ _____

② D 是 \overline{BC} 的中點 \Rightarrow _____

③ 隱藏條件 \Rightarrow _____

(2) 利用 _____ 來證明

證明過程

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

\therefore ① $\overline{AB} =$ _____ (等腰 \triangle)

② $\overline{BD} =$ _____ (D 為中點)

③ $\overline{AD} =$ _____ (共用邊)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ (_____ 全等性質)

因此 $\angle B = \angle$ _____ (對應角相等)。

2. 已知 P 點是 $\angle ABC$ 的角平分線上任一點。

證明： $\overline{PD} = \overline{PE}$

思考過程

(1) 證明： \Rightarrow _____

(2) 已知：

① P 是 $\angle ABC$ 的角平分線 \Rightarrow _____

② 「垂直」 \Rightarrow _____

③ 隱藏條件 \Rightarrow _____

(3) 利用 _____ 來證明。

證明過程

$\triangle DBP$ 和 $\triangle EBP$ 中

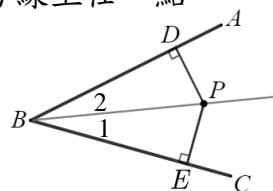
\therefore ① $\angle 1 = \angle$ _____ (角平分線)

② $\angle BDP = \angle BEP =$ _____ 度
(公用邊)

③ $\overline{BP} =$ _____ (共用邊)

$\therefore \triangle DBP \cong \triangle EBP$ (_____ 全等性質)

因此 $\overline{PD} =$ _____ (對應邊相等)。

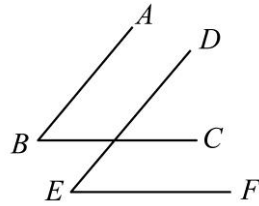




例題 ① 利用平行線性質證明 1——同位角



已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ 求證： $\angle B = \angle E$



☆筆記

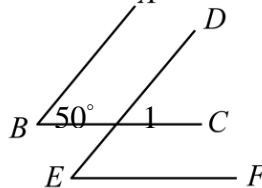
☆



牛刀小試 4

1. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 50^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度？



(1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore$ _____ 角相等

$\angle 1 = \angle$ _____ = _____ 度。

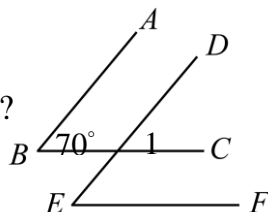
(2) $\because \overline{BC} \parallel \overline{EF} \therefore$ _____ 角相等

$\angle E = \angle$ _____ = _____ 度。



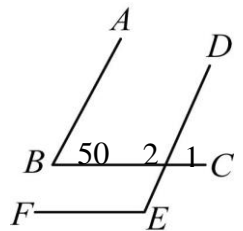
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 70^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度？



3. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 50^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度



(1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore$ _____ 角相等

$\angle 1 = \angle$ _____ = _____ 度。

(2) $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (平角)

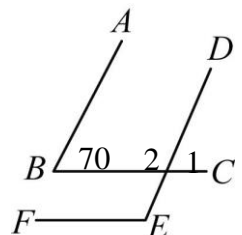
$\therefore \angle 2 =$ _____ 度。

(3) $\because \overline{BC} \parallel \overline{EF} \therefore$ _____ 角相等

$\angle E = \angle$ _____ = _____ 度。

4. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 70^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度



**例題****②****利用平行線性質證明 2——平行四邊形**

請證明平行四邊形對角相等

已知：_____

求證：_____

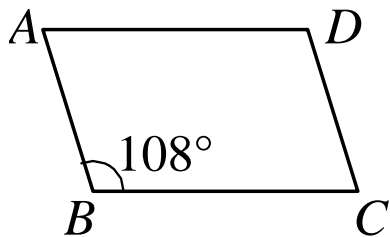
證明：



☆筆記

**牛刀小試 5**

1. 如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle B = 108^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

(1) \because 平行四邊形_____角相等

$$\therefore \angle D = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

(2) \because 平行四邊形_____角互補

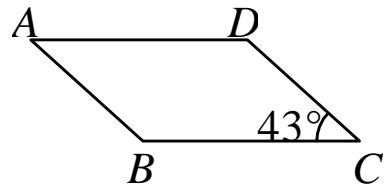
$$\angle A + \angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ - 108^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

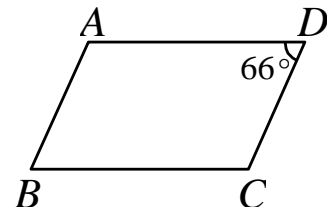
(3) \because 平行四邊形_____角相等

$$\angle C = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

2. 如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle C = 43^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

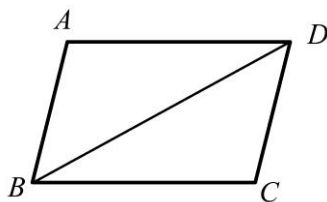


3. 如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle D = 66^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

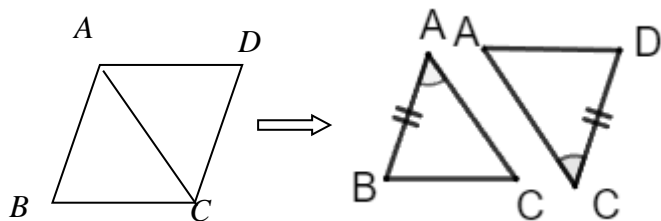


**例題****③****利用三角形的全等性質證明 1——平行四邊形**已知：四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形求證： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

證明：



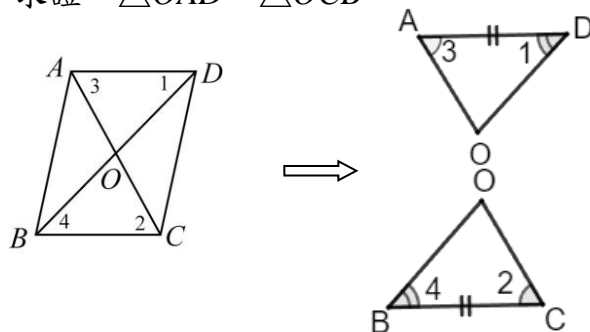
☆筆記

**牛刀小試 6**1. 如右圖，已知 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CDB$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\angle BAC = \angle ACD$ 。試證 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ 

證明：

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中 \therefore ① $\overline{AB} =$ _____ (已知)② $\angle BAC =$ _____ (已知)③ $\overline{AC} =$ _____ (公用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (_____ 全等性質)

2. 證明平行四邊形兩對角線互相平分。

已知： $ABCD$ 為平行四邊形。求證： $\triangle OAD \cong \triangle OCB$ 

證明：

在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OCB$ 中， $\therefore ABCD$ 為平行四邊形 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ① $\angle 1 = \angle 4$ (_____ 角相等)② $\angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角相等)③ $\overline{AD} =$ _____ (對邊相等) $\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCB$ (_____ 全等性質)

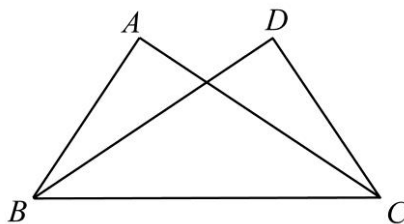


例題 4 利用三角形的全等性質證明 2——重疊圖形



如圖，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中
已知： $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$
求證： $\angle A = \angle D$

證明：



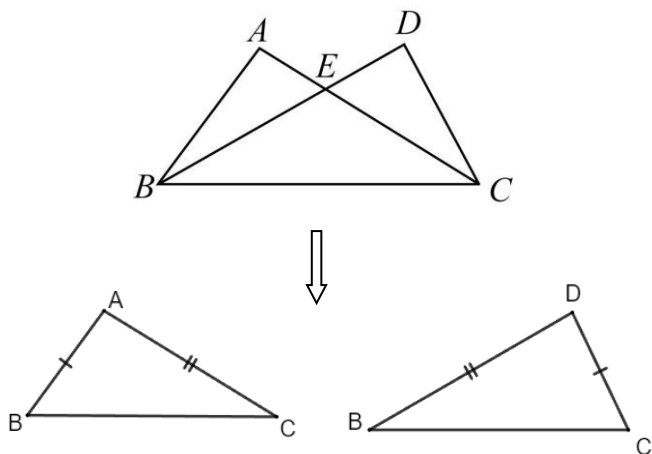
☆筆記



牛刀小試 7

1. $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，

求證： $\angle ACB = \angle DBC$



證明：

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

② $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

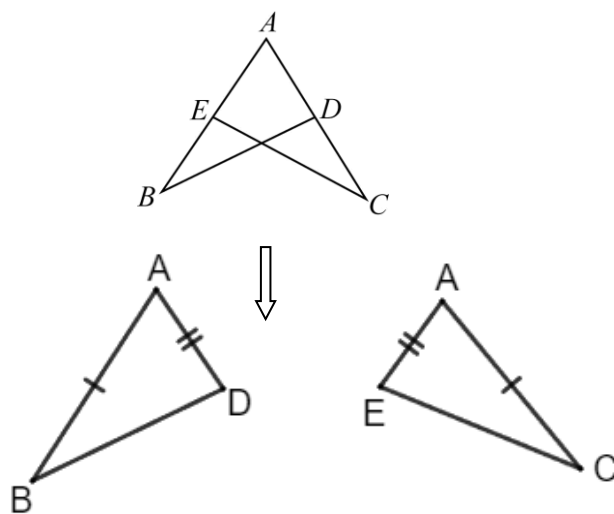
③ $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (共用邊)

$\triangle ABC \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$ (____全等)

故 $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應角相等)

2. 已知： $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$



證明：

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

② $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

③ $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$ (____全等)

故 $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)



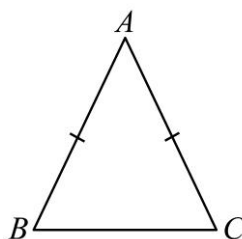
例題 5 利用三角形的全等性質證明 3——輔助線



已知： $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle

求證： $\angle B = \angle C$

證明：



☆筆記



牛刀小試 8

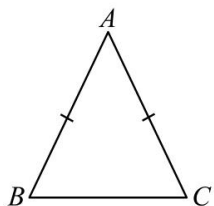
1. $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， $\angle A = 40^\circ$ ，求 $\angle B = ?$

$\because \triangle ABC$ 為等腰 \triangle

$\therefore \angle B = \angle$ _____

$$= \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{180 - (\quad)}{2}$$

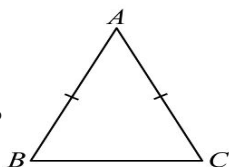
=



2. $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， $\angle B = 50^\circ$ ，求 $\angle A = ?$

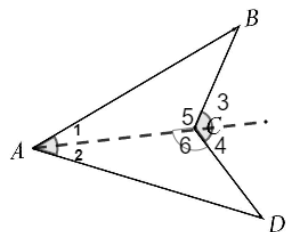
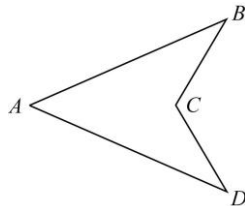
(1) $\because \triangle ABC$ 為等腰 \triangle

$\therefore \angle C = \angle$ _____ $=$ _____ $^\circ$



(2) $\angle A =$ _____

3. 如圖，試證 $\angle BCD = \angle A + \angle B + \angle D$



證明：(1) 連結 \overline{AC} 並延伸 \overline{AC} ，作 \overrightarrow{AC}

(2) $\triangle ABC$ 中

$\because \angle$ _____ 是 $\triangle ABC$ 的外角

$\therefore \angle$ _____ $= \angle 1 + \angle B$

(3) $\triangle ADC$ 中

$\because \angle$ _____ 是 $\triangle ADC$ 的外角

$\therefore \angle$ _____ $= \angle 2 + \angle D$

由 (2) + (3)

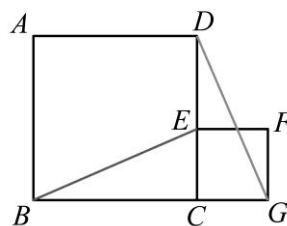
$$\begin{aligned} \angle BCD &= \boxed{\angle \quad} + \boxed{\angle \quad} \\ &= \boxed{\angle \quad + \angle B} + \boxed{\angle \quad + \angle D} \\ &= \boxed{\angle \quad + \angle \quad} + \angle B + \angle D \\ &= \boxed{\angle A} + \angle B + \angle D \end{aligned}$$

**例題****⑥ 利用三角形的全等性質證明 4——正方形**

已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $CEFG$ 都是正方形，
而且 E 在 \overline{CD} 上

求證： $\overline{BE} = \overline{DG}$

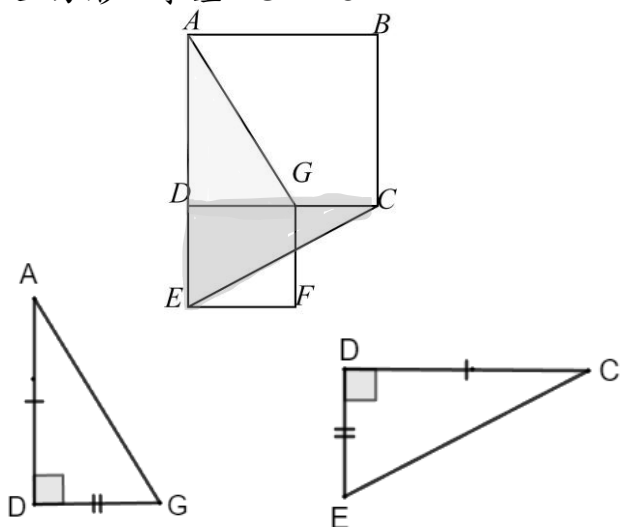
證明：



☆筆記

**牛刀小試 9**

1. 已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $DEFG$ 都是正方形。求證 $\overline{AG} = \overline{CE}$ 。



證明：

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDE$ 中

① $\overline{DG} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($DEFG$ 是正方形)

② $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($ABCD$ 是正方形)

③ $\angle ADG = \angle CDE = \underline{\hspace{2cm}}$ 度

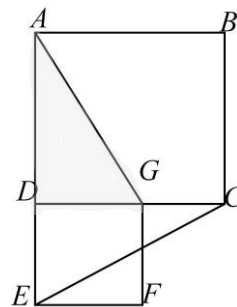
$\triangle ADG \cong \triangle CDE$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 全等)

故 $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)

2. 已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $DEFG$ 都是正方形。若 $\overline{DG} = 5$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

(1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\overline{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$



$$(1) \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2}$$

$$= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$



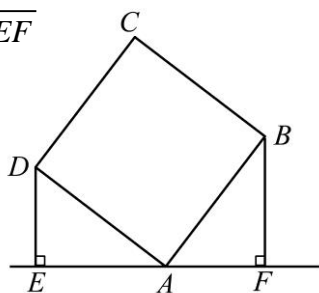
例題 7 利用三角形的全等性質證明 5——直角三角形



已知： $ABCD$ 是正方形，而且 $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{EF}$

求證： $\overline{DE} = \overline{AF}$

證明：



☆筆記

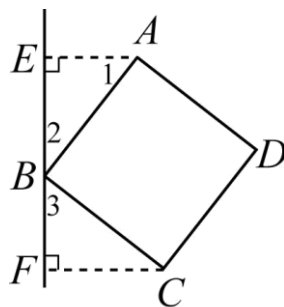


牛刀小試 10

1. 四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

$\overline{BF} \perp \overline{CF}$

(1) 試證： $\overline{AE} = \overline{BF}$



證明：

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BFC$ 中

① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($ABCD$ 是正方形)

② $\angle AEB = \angle BFC = \underline{\hspace{2cm}}$
($\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{CF}$)

③ $\because \angle 1 + \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 度

$\angle 2 + \angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 度

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$

推得 $\angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$

$\triangle ADG \cong \triangle CDE$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 全等)

故 $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)

2. 四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

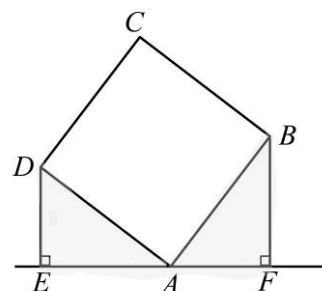
$\overline{BF} \perp \overline{CF}$ ，若 $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{BF} = 4$ ，

求

(1) $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(2) $\overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(3) $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



$\because \triangle DEA \cong \triangle AFB$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 全等)

$\therefore \overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{BF}^2}$

$= \sqrt{(\underline{\hspace{2cm}})^2 + (\underline{\hspace{2cm}})^2}$

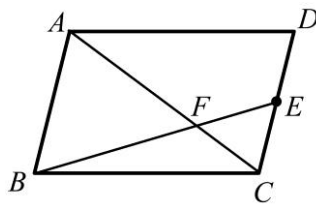


例題 8 利用相似性質來證明



已知：如圖，在 $\square ABCD$ 中， E 為 \overline{CD} 中點， \overline{BE} 和 \overline{AC} 交於 F

求證： $\overline{AF} = 2\overline{CF}$

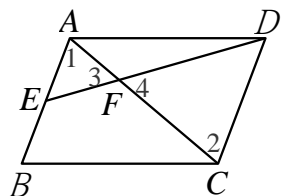


☆筆記



牛刀小試 11

1. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 E 為 \overline{AD} 的中點， \overline{AC} 與 \overline{BE} 交於 F 點，
求證：(1) $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ 。



證明：

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CDF$ 中

(1) $\angle 1 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

(2) $\angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

$\triangle AEF \sim \triangle CDF$ (_____ 相似)

2. 呈上題，若 $\overline{AF} = 6$ ，則 $\overline{CF} = ?$

(1) $\because \triangle AEF \sim \triangle CDF$ 且 E 為 \overline{AD} 的中點

$\therefore \overline{AE} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{AB} =$ _____ : _____

表示 $\triangle CDF$ 是 $\triangle AEF$ 的 _____ 倍放大圖

(2) $\overline{AF} : \overline{CF} = \overline{AE} : \overline{AB} =$ _____ : _____

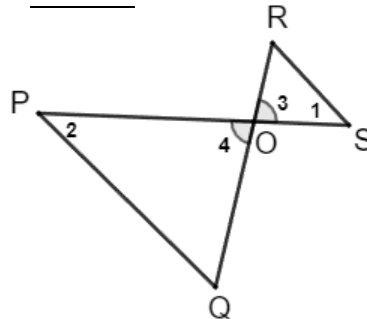
() : $\overline{CF} =$ _____ : _____

$\overline{CF} =$ _____

3. 如圖， \overline{PS} 與 \overline{QR} 交於 O 點，

已知 $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ，且 $\overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$ ，

$\overline{PQ} = 12$ ，則 $\overline{RS} =$ _____。



(1) $\because \overline{RS} \parallel \overline{PQ}$

① $\angle 1 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

② $\angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

$\therefore \triangle SRO \sim \triangle PQO$ (_____ 相似)

(2) 因為 $\overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$ ，

所以 $\triangle PQO$ 是 $\triangle SRO$ 的 _____ 倍放大圖

$\overline{PQ} : \overline{RS} = \overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$

() : $\overline{RS} = 3 : 1$

$\overline{RS} =$ _____



舉例：

1. 偶數：_____

☆換個寫法：_____

問題：有沒有辦法可以寫出世界上**所有的偶數**？

2. 奇數：_____

☆換個寫法：_____

問題：有沒有辦法可以寫出世界上**所有的奇數**？

☆筆記

① 0 是奇數還是偶數？

② 3 的倍數如何表示？



牛刀小試 12

1. (1) 請寫出 4 個偶數：_____。

(2) 請寫出 4 個奇數：_____。

(3) 請寫出 4 個整數：_____。

注意：整數包含奇數和偶數2. 若 a 是**奇數**，則下列各題是奇數或偶數(1) $2a$ 為_____數**代數字判斷** $2a = 2 \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $2a+1$ 為_____數**代數字判斷** $2a+1 = 2 \times (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $2(a+3)$ 為_____數**代數字判斷** $2(a+3) = 2 \times [(\quad) + 3] = \underline{\hspace{2cm}}$ 3. 若 b 是**偶數**，則下列各題是奇數或偶數(1) $b+1$ 為_____數**代數字判斷** $b+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $b+2$ 為_____數**代數字判斷** $b+2 = (\quad) + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 4. 若 c 是**整數**，則下列各題是奇數或偶數或都有可能(1) $c+1$ 為_____**奇** $c+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ **偶** $c+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $2c$ 為_____**奇** $2c = 2 \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$ **偶** $2c = 2 \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$



例題 9 代數證明 1——奇數和偶數



已知： a 是一個奇數

求證： a^2 也是奇數

證明：

☆筆記



牛刀小試 13

1. 已知： a 是偶數，則 a^2 一定是偶數 嗎？

(1) 若 $a = 2$ ，

$$a^2 = (\quad) \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

a^2 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

(2) 若 $a = 4$ ，

$$a^2 = (\quad) \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

a^2 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

2. 已知： a 是偶數。

求證： a^2 也是偶數。

證明：

$\because a$ 是偶數，假設 $a = 2k$ ，

(其中 k 是_____數)

$$\therefore a^2 = (\underline{\hspace{2cm}})^2 = 4k^2$$

$$= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

$$= 2 \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ 數}$$

故 a^2 也是偶數。

3. 已知： a 是奇數，則 $a+1$ 一定是偶數 嗎？

(1) 若 $a = 1$ ，

$$a+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a+1$ 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

(2) 若 $a = 3$ ，

$$a+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a+1$ 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

2. 若 a 為奇數。

試證： $a+1$ 為偶數。

證明：

$\because a$ 是奇數，假設 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(其中 k 是整數)

$$\therefore a+1 = (\underline{\hspace{2cm}}) + 1 = 2k + 2$$

$$= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

$$= 2 \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ 數}$$

故 $a+1$ 也是偶數。



例題 10 代數證明 2——比大小



已知： a 、 b 是正數，而且 $a > b$

求證： $a^2 > b^2$

證明：

☆筆記

若 a 、 b 是正數， $a^2 > b^2$

則 $a \square b$



牛刀小試 14

1. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $7 \square 3 \Rightarrow 7^2 \square 3^2$

(2) $5 \square 2 \Rightarrow 5^2 \square 2^2$

若 a 、 b 是正數，而且 $a > b$ ，

則 $a^2 \square b^2$

2. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $5^2 \square 4^2$ ，但 $5 \square 4$

(2) $7^2 \square 3^2$ ，但 $7 \square 3$

若 a 、 b 是正數，而且 $a^2 > b^2$

則 $a \square b$

3. 若 a 、 b 為負數，且 $a < b$ 。

那麼 a^2 會小於 b^2 嗎？

在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $(-7) \square (-3) \Rightarrow (-7)^2 \square (-3)^2$

(2) $(-5) \square (-2) \Rightarrow (-5)^2 \square (-2)^2$

若 a 、 b 是負數，且 $a < b$

則 $a^2 \square b^2$

4. 已知： a 、 b 為負數，且 $a < b$ 。

求證： $a^2 > b^2$

證明：

$$\because a < b < 0 \quad \therefore a - b \square 0,$$

$$\therefore a、b \text{ 為負數 } \therefore a + b \square 0$$

$$a^2 - b^2 = (\quad)(\quad) \square 0$$

故 $a^2 > b^2$



例題 11 代數證明 3——畢氏定理



已知： a 、 b 、 c 分別為直角 \triangle 的三邊長，而且 c 是斜邊
(其中 a 、 b 、 c 是正整數)

求證： a^2 是 $(b+c)$ 的倍數

證明：

☆筆記
因數和倍數



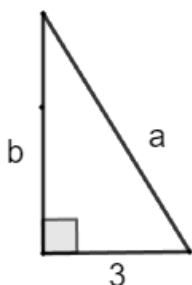
牛刀小試 15

1. 在直角 \triangle 中， a 為斜邊長， b 、3 為兩股長。

其中 a 、 b 為正整數，

請問：下列哪一個數是 $(a+b)$ 的倍數？

(A) 7 (B) 8 (C) 9



(1) $\because a$ 、 b 、3 為直角三角形的三邊長，

且 a 為斜邊長，

$$\therefore b^2 + 3^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = (\underline{\hspace{1cm}})^2$$

$$(\underline{\hspace{1cm}} + b)(\underline{\hspace{1cm}} - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

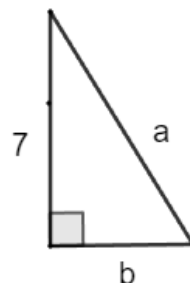
故 $\underline{\hspace{2cm}}$ 是 $(a+b)$ 的倍數。

2. 已知直角 \triangle 中， b 為斜邊長，

a 、7 為兩股長，其中 a 、 b 為正整數，

請問： $(a-b)$ 為下列哪一個數的因數？

(A) 25 (B) 36 (C) 49



(1) $\because a$ 、 b 、7 為直角三角形的三邊長，

且 a 為斜邊長，

$$\therefore b^2 + 7^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = (\underline{\hspace{1cm}})^2$$

$$(\underline{\hspace{1cm}} + b)(\underline{\hspace{1cm}} - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

故 $(a-b)$ 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的因數。



牛刀小試 1

1. 已知: $\angle B = \angle C$

求證: $\overline{AB} = \overline{AC}$

2. 已知: P 在 \overline{AB} 的中垂線上

求證: $\overline{PA} = \overline{PB}$

3. 已知: $ABCD$ 為平行四邊形

求證: 對角相等

4. 已知: $\overline{AB} = \overline{BD}$, $\angle ABC = \angle DBC$

求證: $\overline{AC} = \overline{CD}$

牛刀小試 2

1. $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (對頂角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

$45^\circ + \angle B = 23^\circ + 59^\circ$

$\angle B = 37^\circ$

2. 30°

3. 28°

牛刀小試 3

1. (1) ① $\overline{AB} = \overline{AC}$

② $\overline{BD} = \overline{CD}$

③ $\overline{AD} = \overline{AD}$

(2) SSS 全等性質

證明過程

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{BD} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{AD}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

(SSS 全等性質)

因此 $\angle B = \angle C$

2. (1) $\overline{PD} = \overline{PE}$

(2) ① $\angle 1 = \angle 2$

② $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$

③ $\overline{BP} = \overline{BP}$ (共用邊)

(3) AAS 全等性質

證明過程

$\triangle DBP$ 和 $\triangle EBP$ 中

(1) $\angle 1 = \angle 2$ (角平分線)

(2) $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$

(3) $\overline{BP} = \overline{BP}$ (共用邊)

$\triangle DBP \cong \triangle EBP$ (AAS 全等)

故 $\overline{PD} = \overline{PE}$

牛刀小試 4

1. (1) 同位, $\angle B$, 50

(2) 同位, $\angle 1$, 50

2. 70 度

3. (1) 同位, $\angle B$, 50

(2) 130

(3) 同位, $\angle 2$, 130

4. 110 度

牛刀小試 5

1. (1) 對角, $\angle B$, 108

(2) 鄰角, 180, 180, 72

(3) 對角, $\angle A$, 72

2. $\angle A = 43^\circ$, $\angle B = 137^\circ$

$\angle D = 137^\circ$

3. $\angle A = 114^\circ$, $\angle B = 66^\circ$

$\angle C = 114^\circ$

牛刀小試 6

1. \overline{DC} , $\angle DCA$, \overline{AC} SAS,

2. 內錯, $\angle 2$, 內錯, \overline{BC} , ASA,

牛刀小試 7

1. $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

① $\overline{AB} = \overline{DC}$

② $\overline{AC} = \overline{BD}$

③ $\overline{BC} = \overline{BC}$

$\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SSS 全等)

故 $\angle ACB = \angle DBC$

2. $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 中

① $\overline{AB} = \overline{AC}$

② $\overline{AD} = \overline{AE}$

③ $\angle A = \angle A$ (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle AEC$ (SAS 全等)

故 $\overline{BD} = \overline{CE}$

牛刀小試 8

1. $\angle D$, 40, 70 度

2. (1) $\angle B$, 50,

(2) 80 度

3. (1) $\angle 3$, $\angle 3$

(2) $\angle 4$, $\angle 4$

(3) $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 1$, $\angle 2$,
 $\angle 1$, $\angle 2$

牛刀小試 9

1. 在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDE$

\therefore ① $\overline{DG} = \overline{DE}$

② $\overline{AD} = \overline{DC}$

③ $\angle ADG = \angle CDE = 90^\circ$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE$ (SAS 全等)

故 $\overline{AG} = \overline{CE}$

2. (1) 13 (2) 13

牛刀小試 10

1. (1) 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BFC$

\therefore ① $\overline{AB} = \overline{BC}$

② $\angle AEB = \angle BFC$

③ $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle BFC$ (AAS 全等)

故 $\overline{AE} = \overline{BF}$

2. (1) 4

(2) 3

(3) 5

牛刀小試 11

1. (1) $\angle 2$, 內錯

(2) $\angle 4$, 對頂

2. (1) 1:2, 2

(2) 6, 1:2, 12

3. (1) ① $\angle 2$, 內錯

② $\angle 4$, 對頂, AA

(2) 12, 4

牛刀小試 12

1. (1) 2, 4, 6, 8, 10, ...

(2) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

2. (1) 偶, 1, 2

(2) 奇, 1, 3

(3) 偶, 1, 8

3. (1) 奇, 2, 3

(2) 偶, 2, 4

4. (1) 都有可能

1, 2,

2, 3

(2) 偶

1, 2

2, 4

牛刀小試 13

1. (1) $2 \times 2 = 4$, 偶

(2) $4 \times 4 = 16$, 偶

2. $\because a$ 是偶數

設 $a = 2k$ (k 為整數)

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$= 2 \times (2k^2)$$

$$= 2 \times \text{整數}$$

$\therefore a^2$ 也是偶數

3. (1) 1, 2, 偶

(2) 3, 4, 偶

4. $\because a$ 是奇數, 設 $a = 2k + 1$

(k 為整數)

$$a + 1 = (2k + 1) + 1$$

$$= 2k + 2$$

$$= 2 \times (k + 1)$$

$$= 2 \times \text{整數}$$

故 $a + 1$ 是偶數

牛刀小試 14

1. (1) $>$, $>$

(2) $>$, $>$

$>$

2. (1) $>$, $>$

(2) $>$, $>$

$>$

3. (1) $<$, $>$, $>$

(2) $<$, $>$

(4) $<$, $<$

$(a+b)(a-b)$, $>$

牛刀小試 15

1. C

(1) a^2

(2) 3^2 , a , a , 9 , 9

2. C

(1) a^2

(2) 7^2 , a , a , 49 , 49



B5 3-2 三角形的內心外心與重心



概念 ① 認識外心 1—中垂線



☆問題 1 找一個點和 A 、 B 兩點的距離相等

$A \bullet \text{-----} \bullet B$

$A \bullet \text{-----} \bullet B$

☆問題 2 找一個點和 A 、 B 、 C 三點的距離相等

$\bullet C$

$A \bullet \text{-----} \bullet B$

☆筆記



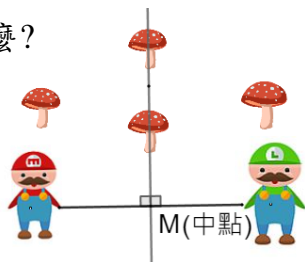
☆1. 畫 \overline{AB} 中垂線 L ，可以得到中垂線 L 上的每一點到 A 、 B 兩點的距離_____

2. 畫 \overline{AB} 中垂線 L ， \overline{BC} 中垂線 M ，可以得到兩條中垂線 L 和 M 的交點會_____

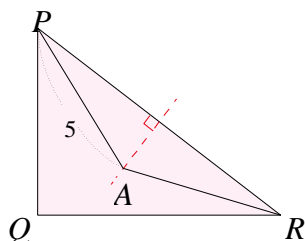


牛刀小試 1

1. 請問香菇要放在哪個位置才公平？
請圈起來並說明為什麼？



2. 如圖，若 A 點在 \overline{PR} 的中垂線上，
則 $\overline{AR} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



3. L 、 M 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 的中垂線交於 O 點，若 $\overline{OA} = 5$ ，試問：

(1) O 點在 \overline{AB} 的中垂線 L 上， $\overline{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

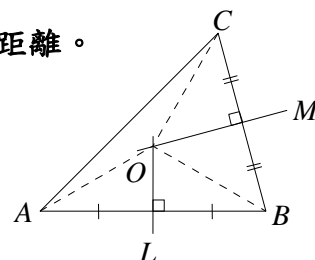
(2) O 點在 \overline{BC} 的中垂線 M 上， $\overline{OC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) O 點在中垂線 L 和 M 上，

所以 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 的大小關係為何？

$\overline{OA} \square \overline{OB} \square \overline{OC}$

我們說兩條中垂線 L 和 M 的交點會
到_____等距離。





1. 畫 \overline{AB} 中垂線 L ， \overline{BC} 中垂線 M ，可以得到兩條中垂線 L 和 M 的交點會_____

2. 如果再畫 \overline{AC} 中垂線 N ， L 、 M 、 N 三條中垂線會交於一點嗎？為什麼？

• C

A •

• B



☆三角形三邊的中垂線會_____

這一點稱為三角形的_____

☆筆記



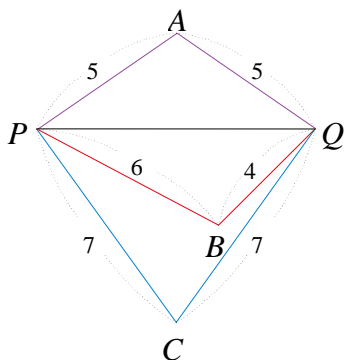
牛刀小試 2

1. \overline{PQ} 外有無數個點，請問：

(1) 哪些點到 \overline{PQ} 兩端點距離相等？

(2) 哪些點在 \overline{PQ} 的中垂線？

(3) 請畫出 \overline{PQ} 的中垂線

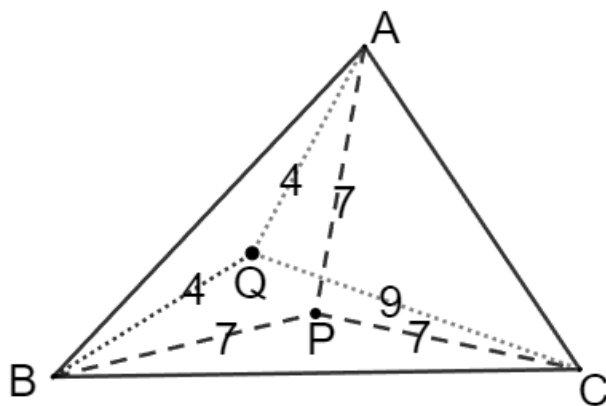


2. 如下圖，

(1) _____點到 $\triangle ABC$ 三頂點距離相等。

(2) 這一點稱為 $\triangle ABC$ 的_____心。

(3) 作 $\triangle ABC$ 三邊的_____線會通過 P 點。



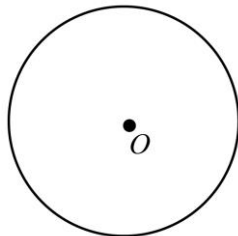


☆1. 外接圓：

- ① 如果三角形的三個頂點都在圓上
我們說這個圓就是三角形的_____
- ② 外接圓的圓心就稱為_____

☆2. ① 請在圓 O 上找不同的三點 A 、 B 、 C
並畫出 $\triangle ABC$

- ② 這個圓就是 $\triangle ABC$ 的_____
- ③ 圓心 O 就是 $\triangle ABC$ 的_____
- ④ \triangle 的外心到_____等距離



☆3. $\triangle ABC$ 的外心和 $\triangle ABC$ 三邊的中垂線有什麼關係？

☆ \triangle 的外心

- ① _____ ② _____
- ③ _____

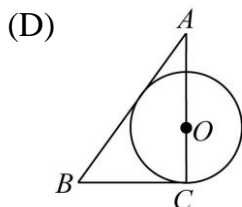
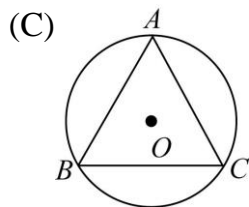
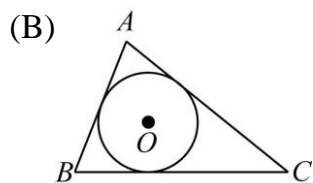
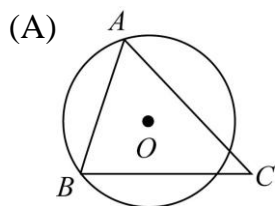
☆筆記

「外」接圓為什麼稱「外」？



牛刀小試 3

1. (1) 下列哪些選項中哪一個是 $\triangle ABC$ 的外接圓？



(2) 三角形的三個頂點都在圓_____，
(內、外、上)

我們說這個圓就是三角形的外接圓。

(3) $\triangle ABC$ 的外接圓的圓心，簡稱_____。

2. 請回答下列問題：

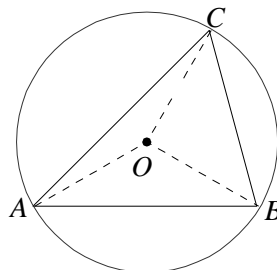
- (1) 圓 O 是 $\triangle ABC$ 的_____圓，
- (2) 圓心 O 稱為是 $\triangle ABC$ 的_____心
- (3) \overline{OA} 是 $\triangle ABC$ 外接圓的_____。
- \overline{OB} 是 $\triangle ABC$ 外接圓的_____。
- \overline{OC} 是 $\triangle ABC$ 外接圓的_____。

因此 $\triangle ABC$ 外心到_____等距離，
因為這些線段都是外接圓的_____。

(4) 若 $\overline{OA} = 7$ ，則

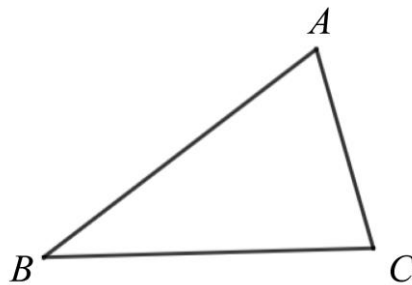
$\overline{OB} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\overline{OC} = \underline{\hspace{1cm}}$

(5) \triangle 三邊中垂線交點會交於_____心。



**例題****①****找外心並畫出外接圓**

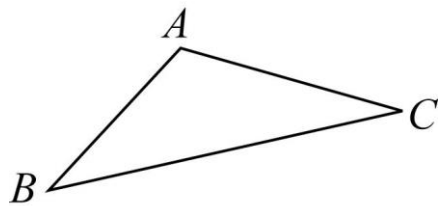
如圖，請找出 $\triangle ABC$ 的外心，並畫出 $\triangle ABC$ 的外接圓



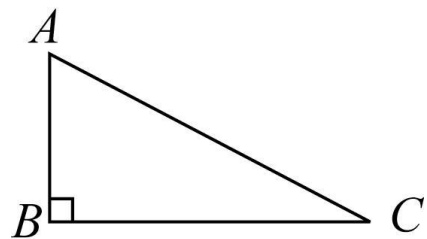
☆筆記

**牛刀小試 4**

1. 請找出鈍角 $\triangle ABC$ 的外心 O ，並畫出 $\triangle ABC$ 的外接圓。



2. 請找出直角 $\triangle ABC$ 的外心 O ，並畫出 $\triangle ABC$ 的外接圓。



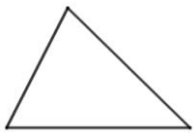
- (1) 當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形時，
外心的位置在 $\triangle ABC$ _____。
(內部，外部，邊上)
- (2) 比較 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 的大小關係。

- (1) 當 $\triangle ABC$ 為直角三角形時，
外心的位置在 $\triangle ABC$ _____。
(內部，外部，邊上)
- (2) 比較 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 的大小關係。

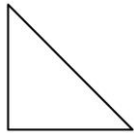


☆ 請用尺規作圖畫出下列三角形的外接圓，並觀察外接圓的圓心位置有何不同？

① 銳角三角形



② 直角三角形



③ 鈍角三角形



☆ 筆記

整理： \triangle 外心的位置

① 銳角三角形外心在

② 直角三角形外心在

③ 鈍角三角形外心在



牛刀小試 5

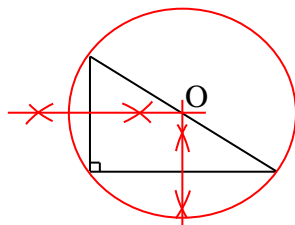
1. (1) 如圖，請問 $\triangle ABC$ 是什麼三角形？

(A) 銳角 (B) 鈍角 (C) 直角 三角形

(2) 圓心 O 在斜邊的 _____ 點。

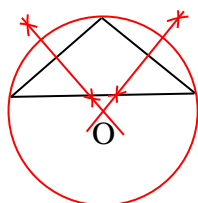
(3) 圓心 O 稱為 \triangle 外接圓的 _____ 心。

(4) 圓心 O 是二條 _____ 線的交點。



2. 如圖，請問 $\triangle ABC$ 是什麼三角形？

(A) 銳角 (B) 鈍角 (C) 直角 三角形



3. $\triangle ABC$ 為直角三角形， O 點到 A 、 B 、 C 三點等距離，則 O 點會落在 $\triangle ABC$ 的哪個位置？
(外部、內部或斜邊)

4. $\triangle ABC$ 為銳角三角形， O 點到 A 、 B 、 C 三點等距離，則 O 點會落在 $\triangle ABC$ 的哪個位置？
(外部、內部或斜邊)

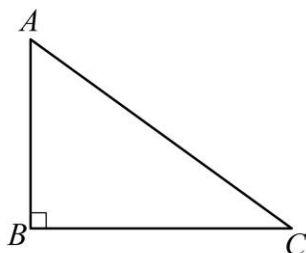
5. $\triangle ABC$ 為鈍角三角形， O 點到 A 、 B 、 C 三點等距離，則 O 點會落在 $\triangle ABC$ 的哪個位置？
(外部、內部或斜邊)



例題 ② 直角三角形的外接圓半徑



如圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ，若 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{BC}=8$
求 $\triangle ABC$ 外接圓半徑是多少？



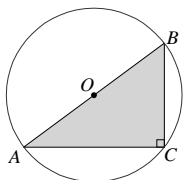
☆筆記



牛刀小試 6

1. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，兩股長分別為
 $\overline{BC}=3$ ， $\overline{AC}=4$ ，則：

(1) $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



(2) \overline{AB} 就是 $\triangle ABC$ 外接圓的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

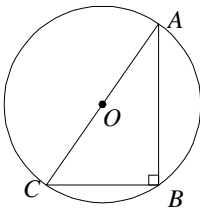
(3) 直角 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $\overline{AB}=5$ ，
 $\overline{BC}=12$ ，則

(1) $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) \overline{AC} 就是 $\triangle ABC$ 外接圓
的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 直角 $\triangle ABC$ 的外接圓
半徑為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

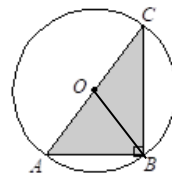


3. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{OA}=6$ ，則

(1) \overline{OA} 是 $\triangle ABC$ 外接圓的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) \overline{OB} 和 \overline{OC} 也是 $\triangle ABC$ 外接圓的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

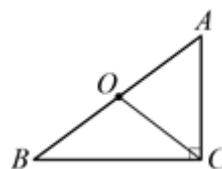
(3) $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，若 O 為外心，
若 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 24$ ，求

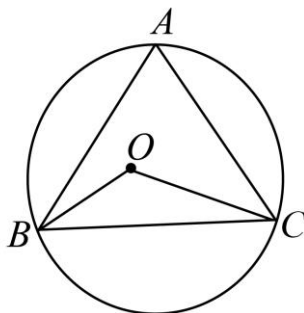
(1) $\overline{OA} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 直角 $\triangle ABC$ 的外接圓直徑為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

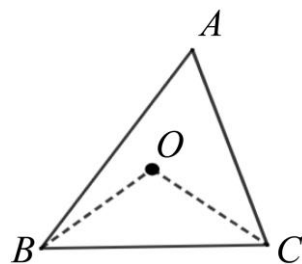


**例題****③****銳角三角形外心求角度**

如圖， O 點是 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle A = 66^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度數 = ?



☆筆記

**牛刀小試 7**

1. O 點是 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle A = 75^\circ$ ，
求 $\angle BOC = ?$

(1) \widehat{BC} 度數 = _____。

$$\angle A = \frac{1}{2} \widehat{BC}$$

$$\widehat{BC} = 2 \angle A$$

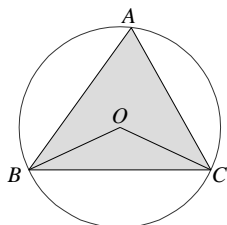
=

(2) $\angle BOC =$ _____。

$$\angle BOC = \widehat{BC}$$

=

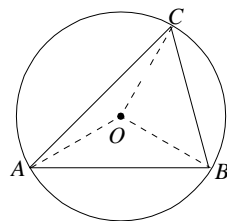
2. O 點是銳角 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle A = 67^\circ$ ，
求 $\angle BOC =$ _____。



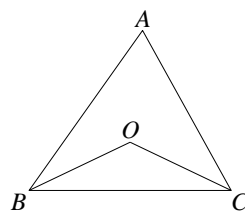
3. O 點是銳角 $\triangle ABC$ 的外心，
若 $\angle BOC = 100^\circ$ ，求 $\angle BAC = ?$

(1) \widehat{BC} 度數 = _____。

(2) $\angle BAC =$ _____。



4. O 點是銳角 $\triangle ABC$ 的外心，
若 $\angle BOC = 130^\circ$ ，求 $\angle A =$ _____。

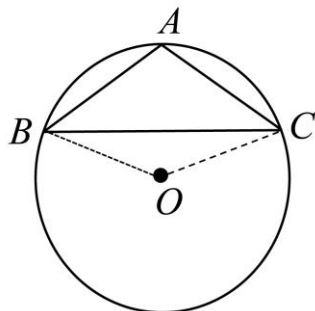




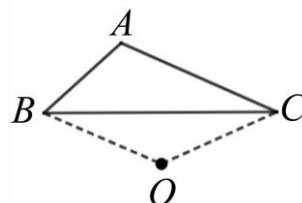
例題 4 鈍角三角形外心求角度



如圖， O 點是 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\angle A = 110^\circ$ ， $\angle BOC$ 的度數？



☆筆記



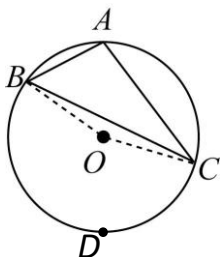
牛刀小試 8

1. 如圖， O 是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，
 $\angle A = 108^\circ$ ，求出下列度數：

(1) \widehat{BDC} 度數 = _____。

(2) \widehat{BAC} 度數 = _____。

(3) $\angle BOC =$ _____。

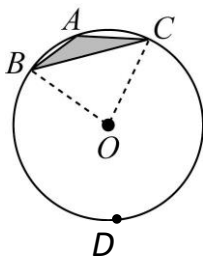


2. 如圖， O 是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，
 $\angle A = 150^\circ$ ，求出下列度數：

(1) \widehat{BDC} 度數 = _____。

(2) \widehat{BAC} 度數 = _____。

(3) $\angle BOC =$ _____。

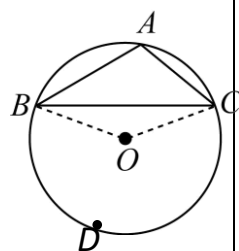


3. 如圖， O 是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，
 $\angle BOC = 160^\circ$ ，則

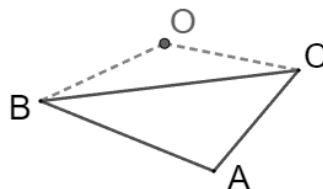
(1) \widehat{BAC} 度數 = _____。

(2) \widehat{BDC} 度數 = _____。

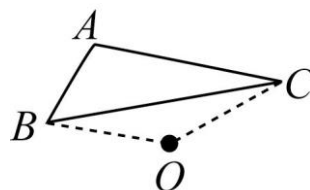
(3) $\angle A =$ _____。



4. 如圖， O 是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，
 $\angle A = 105^\circ$ ，求 $\angle BOC =$ _____。

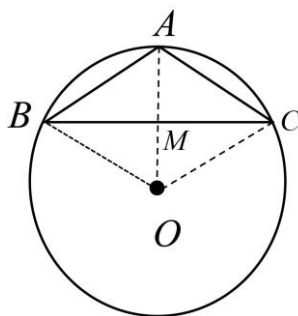


5. 如圖， O 是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，
 $\angle A = 100^\circ$ ，求 $\angle BOC =$ _____。



**例題****5****等腰三角形外接圓半徑 1—鈍角△**

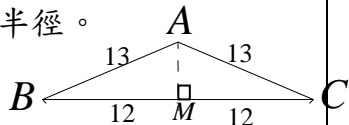
如圖， O 點是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 8$
 請問： $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 = ？



☆筆記

**牛刀小試 9**

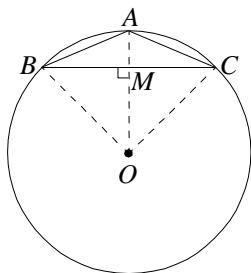
1. O 點是鈍角 $\triangle ABC$ 的外心，
 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 24$ ，
 試求： $\triangle ABC$ 外接圓半徑。



$$(1) \overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + \overline{AM}^2$$

$$\overline{AM} = \underline{\hspace{2cm}}$$



- (2) 設 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 x

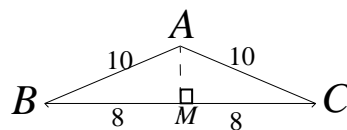
$$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \overline{OM} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{BO}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{OM}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2$$

$$(x-5)^2 = (x-5)(x-5) = x^2 - 10x + 25$$

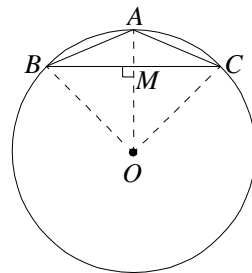
2. 已知鈍角 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ，
 $\overline{BC} = 16$ ，求 $\triangle ABC$ 外接圓半徑 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



$$(1) \overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + \overline{AM}^2$$

$$\overline{AM} = \underline{\hspace{2cm}}$$



- (2) 設 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 x

$$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \overline{OM} = \underline{\hspace{2cm}}$$

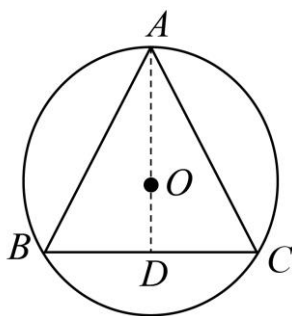
$$\overline{BO}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{OM}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2$$

$$(x-6)^2 = (x-6)(x-6) = x^2 - 12x + 36$$

**例題****⑥ 等腰三角形外接圓半徑 2—銳角△**

如圖， O 點是銳角 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 6$
 請問： $\triangle ABC$ 的外接圓半徑 = ？



☆筆記

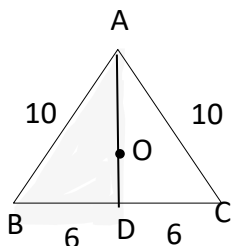
**牛刀小試 10**

1. 如圖， O 點是銳角 $\triangle ABC$ 的外心，若
 $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求 $\triangle ABC$ 外接圓半徑。

(1) 求 \triangle 高

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + \overline{AD}^2$$



$$\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 設 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 x

$$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \overline{OD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{BO}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{OD}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2$$

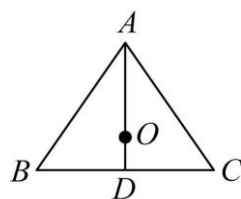
$$(8-x)^2 = 64 - 16x + x^2$$

2. 如圖， O 點是銳角 $\triangle ABC$ 的外心，
 若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 10$ ，求
 $\triangle ABC$ 外接圓半徑。

(1) 求 \triangle 高

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + \overline{AD}^2$$



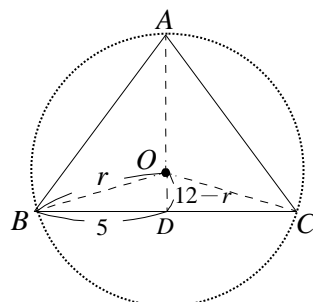
$$\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 設 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 x

$$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \overline{OD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{BO}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{OD}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2$$

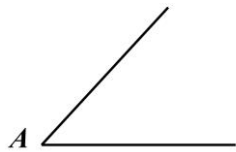


$$(12-x)^2 = 144 - 24x + x^2$$

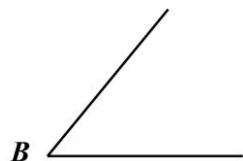


☆複習 角平分線性質

①

請用尺規作圖，畫出 $\angle A$ 的角平分線，若 P 在 $\angle A$ 的角平分線上，則_____

②

若有一點 Q 到 $\angle B$ 的兩邊等距離

則_____



☆整理

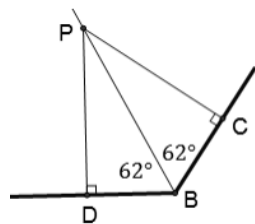
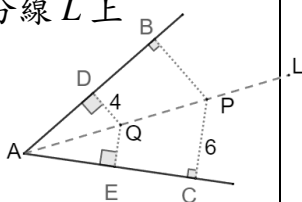
1. 角平分線上任一點到這個角的_____等距離

2. 到一個角的_____等距離的點一定在_____

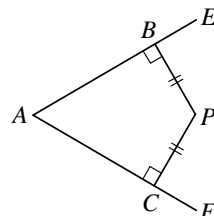
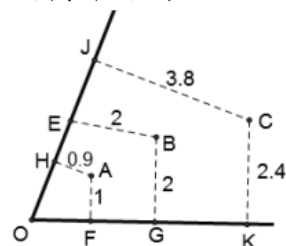
☆筆記



牛刀小試 11

1. 已知 L 為 $\angle A$ 的角平分線，則：因為 P 點、 Q 點在角平分線 L 上所以 $\overline{BP} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{QE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

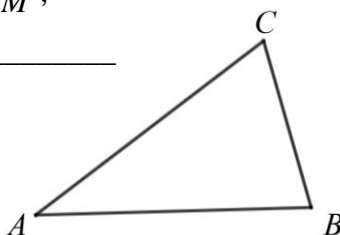
2. 如圖，

(1) $\angle PBC = \angle \underline{\hspace{2cm}} = 62^\circ$ (2) \overline{PB} 是 $\angle DBC$ 的 _____ 線(3) 因為 P 點在角平分線上，所以 \overline{PD} 等於哪一線段？答：_____。3. (1) 到一個角的兩邊等距離的點一定
在此角的 _____ 線上。(2) 若 $\overline{PB} = \overline{PC}$ ，則 P 點在 $\angle A$ 的 _____ 線上。4. 如圖，那一點在 $\angle O$ 的角平分線上？



- ☆1. 請畫出 $\angle A$ 的角平分線 L ， $\angle B$ 的角平分線 M ，
 假設： L 和 M 交於 P 點，則 P 點會_____
 為什麼？

2. 如果再畫出 $\angle C$ 的角平分線 N ，請問：
 N 會不會通過 P 點？為什麼？



☆筆記



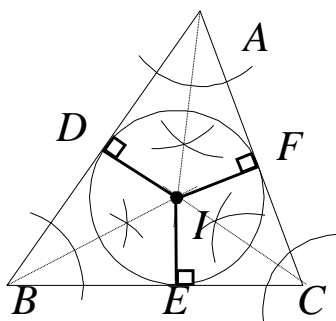
☆整理

三角形三個角的角平分線會_____
 這一點稱為三角形的_____



牛刀小試 12

1. $\triangle ABC$ 中， I 為內心

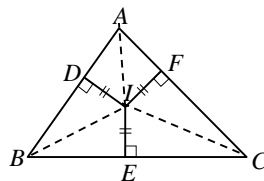


- (1) 根據 $\angle B$ 的角平分線性質
 $\overline{ID} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (2) 根據 $\angle C$ 的角平分線性質
 $\overline{IE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (3) 根據 $\angle A$ 的角平分線性質
 $\overline{IF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (4) 因此可得

$$\overline{ID} \quad \square \quad \overline{IE} \quad \square \quad \overline{IF}$$

我們說內心 I 點到 \triangle 三邊距離_____。

- 2.

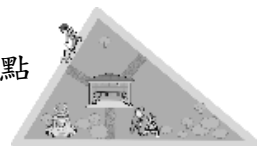


在 $\triangle ABC$ 中， \overline{AI} 和 \overline{BI} 分別是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的角平分線，若 $\overline{ID} = 5$ ， $\angle DAI = 35^\circ$ ，則

- (1) \overline{AI} 是 $\angle A$ 的角平分線
 所以 $\angle FAI = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{IF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (2) \overline{BI} 是 $\angle B$ 的角平分線，所以 $\overline{IE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (3) $\triangle ABC$ 三個角的角平分線交於 I 點，
 I 為 $\triangle ABC$ 的_____心。

3. 宜花市裡有一個三角形的公園，市政府想在內部建造一座涼亭，讓它到三條邊界道路的距離都相等，該如何選擇涼亭的位置呢？

- (A) 三條道路中垂線的交點
 (B) 三條道路夾角角平分線的交點
 (C) 三條道路中線的交點
 (D) 三條道路上的高的交點



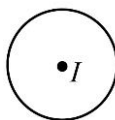


☆1. 內切圓：

- ① 如果三角形的三個邊都和圓相切
我們說這個圓就是三角形的_____
- ② 內切圓的圓心就稱為_____

☆2. ① 請畫出一個 $\triangle ABC$ ，使得 $\triangle ABC$ 的三邊都和這個圓 I 相切

- ② 這個圓就是 $\triangle ABC$ 的_____
- ③ 圓心 I 就是 $\triangle ABC$ 的_____
- ④ \triangle 的內心到 \triangle 的_____等距離



☆3. $\triangle ABC$ 的內心和 $\triangle ABC$ 三條內角平分線有什麼關係？

☆ \triangle 的內心

- ① _____ ② _____
- ③ _____

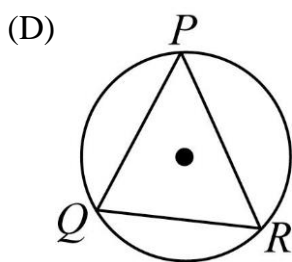
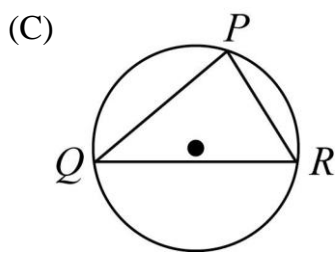
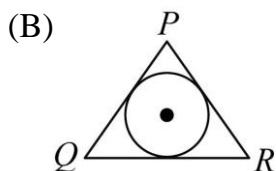
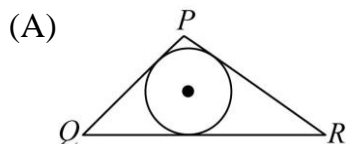
☆筆記

- ① 「內」切圓為什麼稱「內」？
- ② 內心的位置一定在 \triangle 的_____
為什麼？



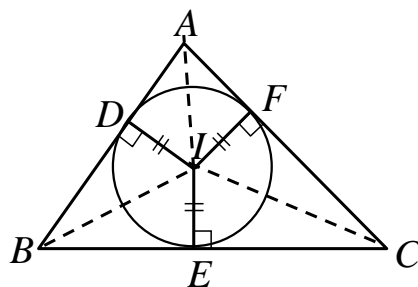
牛刀小試 13

1. 下列哪些選項為 $\triangle PQR$ 的內切圓？



2. 已知 I 為 $\triangle ABC$ 的內心， D 、 E 、 F 為切點

- (1) 內心就是 $\triangle ABC$ _____ 圓的圓心。
- (2) 內心是三條 _____ 線的交點。
- (3) \overline{AI} 是 $\angle A$ 的 _____ 線。
- (4) 圖中內切圓半徑為 _____。
- (5) \overline{ID} 為內切圓的 _____。
- (6) 因為 $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$ ，所以
內心到 \triangle 三 _____ (邊/頂點) 等距離。
- (7) 到 $\triangle ABC$ 三邊距離相等的是 _____ 心。

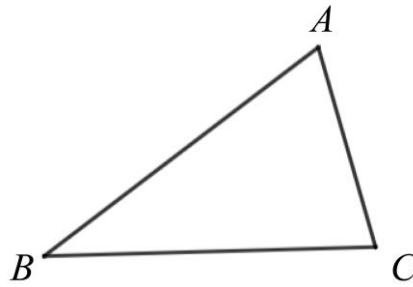




例題 7 找內心並畫出內切圓



如圖，請找出 $\triangle ABC$ 的內心，並畫出 $\triangle ABC$ 的內切圓



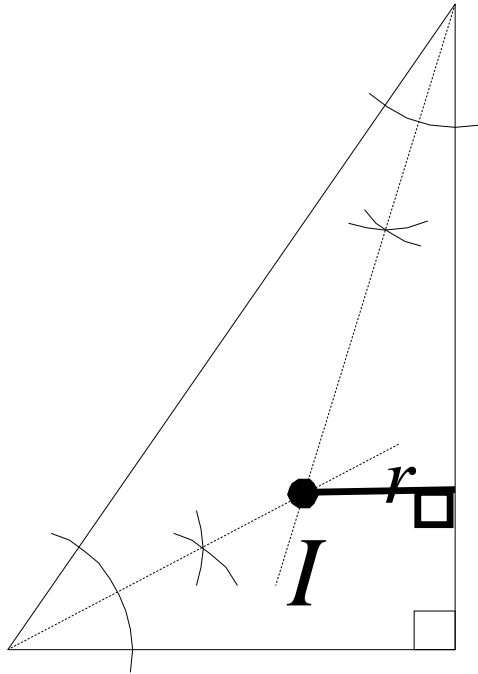
☆筆記



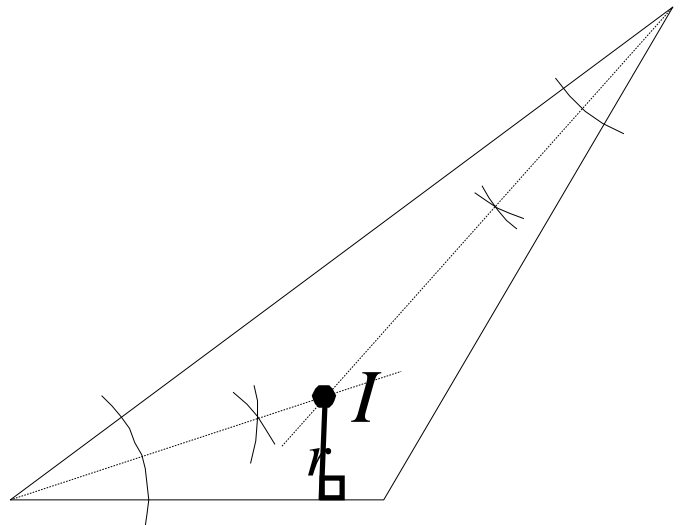
牛刀小試 14

1. 請用尺規作圖，畫出其內切圓。

(1) 直角 \triangle



(2) 鈍角 \triangle





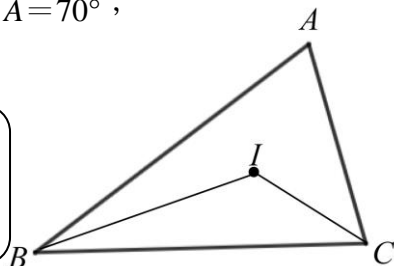
例題 8 內心求角度



如圖，假設 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\angle A = 70^\circ$ ，求 $\angle BIC$ 的度數 = ？

☆提示： \overline{BI} 是 $\angle ABC$ 的_____線

\overline{CI} 是 $\angle ACB$ 的_____線



☆筆記



牛刀小試 15

1. I 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\angle A = 86^\circ$ ，則

(1) 因為 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，所以 \overline{BI} 、 \overline{CI} 是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的_____線

(2) 請在圖中()中畫 ooxx

① $\triangle ABC$ 中

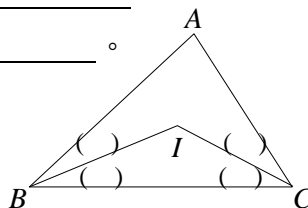
$$86 + 2\angle O + 2\angle X = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$2\angle O + 2\angle X = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$\angle O + \angle X = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

② $\triangle BIC$ 中

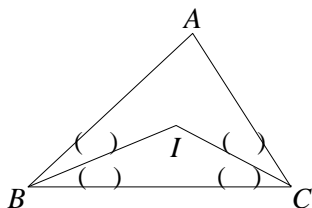
$$\angle BIC = \underline{\hspace{2cm}}$$



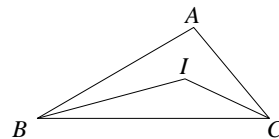
2. I 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\angle A = 80^\circ$ ，則

(1) I 為 $\triangle ABC$ 的內心，請在圖中()中畫 ooxx

(2) $\angle BIC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$



3. 在 $\triangle ABC$ 中， I 點為內心，若 $\angle A = 100^\circ$ ，則 $\angle BIC$ 的度數為何？



4. I 為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\angle BIC = 140^\circ$ ，則

(1) I 為 $\triangle ABC$ 的內心，請在圖中()中畫 ooxx

(2) $\triangle BIC$ 中

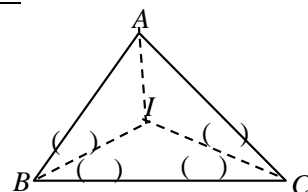
$$140^\circ + \angle O + \angle X = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$(3) \angle O + \angle X = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$(4) 2\angle O + 2\angle X = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

(5) $\triangle ABC$ 中

$$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$





如圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{IP} = \overline{IQ} = \overline{IR} =$ 內切圓半徑 r

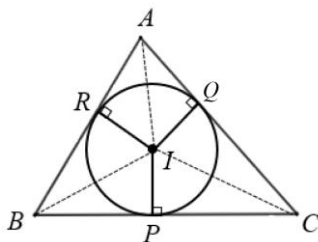
假設 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ ，請問：

① $\triangle BIC$ 面積 = _____

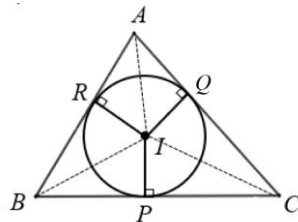
② $\triangle AIC$ 面積 = _____

③ $\triangle AIB$ 面積 = _____

④ $\triangle ABC$ 面積 = _____ = _____
= _____



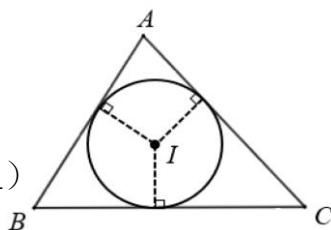
☆筆記



☆ 整理， I 為 $\triangle ABC$ 的內心，則：

\triangle 面積 = _____

(其中， r 為 _____， s 為 _____)

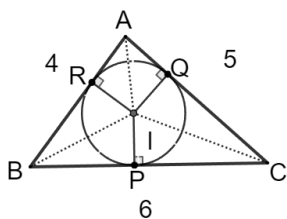


牛刀小試 16

1. 如圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心，
已知內切圓半徑為 2，求 $\triangle ABC$ 面積。

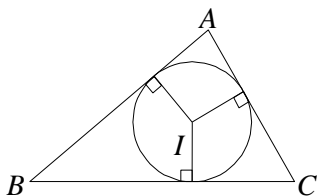
$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times (\text{周長}) \times (\text{內切圓半徑})$$

$$= \frac{1}{2} \times (\quad) \times (\quad)$$



2. I 為 $\triangle ABC$ 的內心，已知內切圓半徑為 4，
 $\triangle ABC$ 周長 = 30，求 $\triangle ABC$ 面積。

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times (\text{周長}) \times (\text{內切圓半徑})$$



3. 已知 $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ，
 $\overline{BC} = 6$ ，若 I 為內心，求

(1) 高 $\overline{AH} =$ _____。

$$(1) \overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$(\quad)^2 = (\quad)^2 + \overline{AH}^2$$

$$\overline{AH}^2 =$$

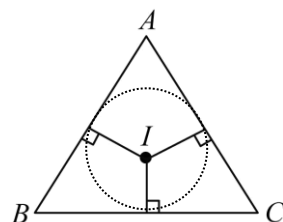
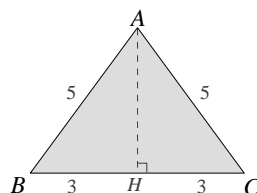
$$\overline{AH} =$$

(2) $\triangle ABC$ 的面積為 _____。

$$\triangle ABC \text{ 面積} =$$

(3) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 _____。

$$\triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{2} \times (\text{周長}) \times (\text{內切圓半徑})$$





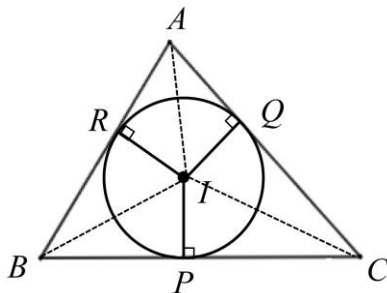
例題 9 內心與三角形的面積



如圖， I 為 $\triangle ABC$ 的內心， $\overline{IP} = \overline{IQ} = \overline{IR} =$ 內切圓半徑 r

假設 $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AB} = 5$

求： $\triangle BIC$ 面積： $\triangle AIC$ 面積： $\triangle AIB$ 面積 = ？



☆筆記

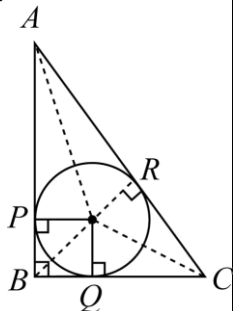


牛刀小試 17

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中， I 為內心， P 、 Q 、 R 為內切圓與三邊的切點，

若 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$

求 $\triangle ABI$ ： $\triangle BIC$ ： $\triangle AIC$ = ？



2. 如右圖，已知 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\triangle ABC$ 面積為 45，

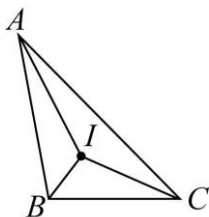
且 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 5 : 4 : 6$ ，則

(1) $\triangle AIB$ ： $\triangle BIC$ ： $\triangle AIC$ = _____。

(2) $\triangle BIC$ 面積 = _____。

設 $\triangle AIB$ 面積 = _____， $\triangle BIC$ 面積 = _____，

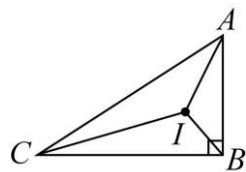
$\triangle AIC$ 面積 = _____



3. 若 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

$\triangle AIB$ 的面積為 13， $\triangle BIC$ 的面積為 12，

$\triangle CIA$ 的面積為 5，則 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA}$ = ？



4. I 是 $\triangle ABC$ 的內心，

若 $\triangle AIB$ 面積： $\triangle BIC$ 面積： $\triangle CIA$ 面積 = 5 : 6 : 7，且 $\triangle ABC$ 周長為 36 公分。

(1) $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC}$ = _____。

(2) $\triangle ABC$ 的三邊長分別為多少？

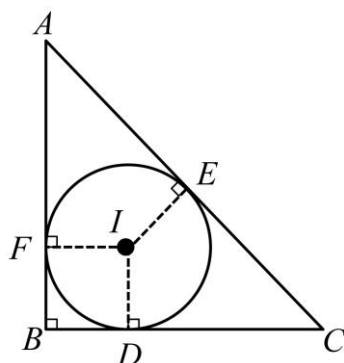
設 \overline{AB} = _____， \overline{BC} = _____， \overline{AC} = _____



例題 10 直角三角形的內切圓半徑



如圖， I 為直角 $\triangle ABC$ 的內心，假設 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AB} = 8$
求： $\triangle ABC$ 的內切圓半徑是多少？



☆筆記

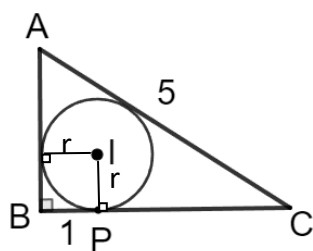
四邊形 $BDIF$ 是_____形

邊長是_____



牛刀小試 18

1. 在直角 $\triangle ABC$ 中， I 是內心， P 是 \overline{BC} 的切點，若 $\overline{AC} = 5$ ， $\overline{BP} = 1$ ，則內切圓半徑=_____。



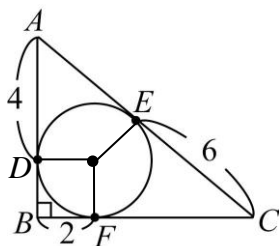
2. 在直角 $\triangle ABC$ 中， I 是內心， D 、 E 、 F 是 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 的切點。

(1) $\overline{AE} =$ _____。

(2) $\overline{BD} =$ _____。

(3) $\overline{CF} =$ _____。

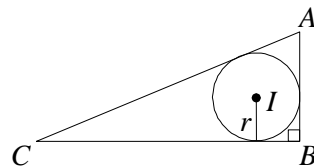
(4) 內切圓半徑=_____。



3. 直角 $\triangle ABC$ 中， I 是內心， O 是外心， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{BC} = 17$ ，求

(1) 內切圓半徑=？

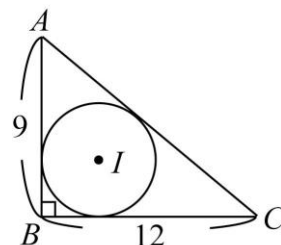
$\triangle ABC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times (\text{周長}) \times (\text{內切圓半徑})$



4. 在直角 $\triangle ABC$ 中， I 是內心，若 $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求

(1) $\overline{AC} =$ _____。

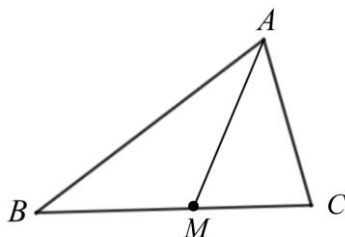
(2) 內切圓半徑=_____。



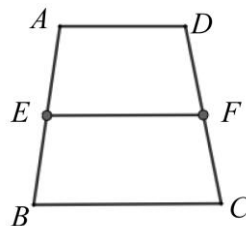
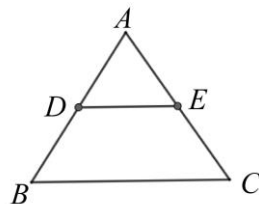


☆**1** 已知： M 是 \overline{BC} 的中點， \overline{AM} 稱為 $\triangle ABC$ 的_____

2 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 的面積會不會一樣呢？為什麼？



☆筆記



☆整理

1. \triangle 一邊中點和頂點的連線稱為_____

2. \triangle 一條中線可以把 \triangle 分成兩個_____相等的 \triangle

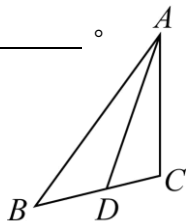


牛刀小試 19

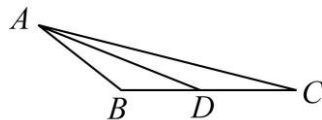
1. \overline{AD} 為 $\triangle ABC$ 的中線，

(1) 表示 D 是 \overline{BC} 的_____。

(2) 若 $\overline{BC} = 10$ ，則 $\overline{BD} =$ _____。



3. D 為 \overline{BC} 的中點，若 $\triangle ABC$ 的面積為 100，則 $\triangle ABD$ 面積為_____。

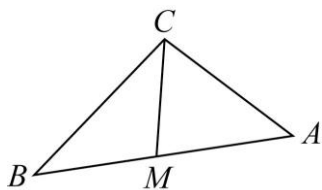


2. $\triangle ABC$ 中， \overline{AB} 中點 M ，連接 \overline{CM} ，

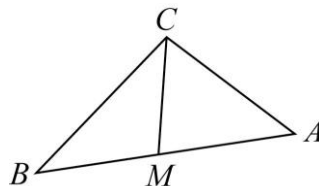
(1) \overline{CM} 稱為 $\triangle ABC$ 的_____線。

(2) $\triangle ACM$ 面積 = 20，

$\triangle BCM$ 面積 = _____。



4. $\triangle ABC$ 中， \overline{AB} 中點 M ，連接 \overline{CM} $\triangle ABM$ 面積 = 5，則 $\triangle ABC$ 面積 = _____。





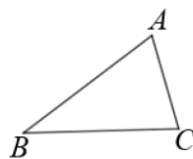
☆1. 班上誰最會轉書？_____

鈺凡很會轉書，假設他要用 1 根手指頭轉動數學課本

請問：他的手指頭要放在哪裡才能保持平衡？

請你畫在右邊的課本上

數學



2. 如果鈺凡要轉一本三角形的書，你覺得他的手指頭要放在哪裡才能保持平衡？

3. 靖雅想到一個方法：

她拿一條線穿過頂點 A 提起來另一頭綁一個石頭，

當保持平衡時，這條線和 \overline{BC} 的交點是 D

請問： D 是_____，

\overline{AD} 是_____為什麼？

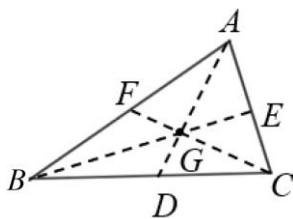
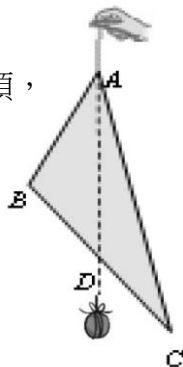
☆4. 用同樣方法可以找到

E 是_____， F 是_____

\overline{BE} 是_____， \overline{CF} 是_____

假設 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 交於 G 點， G 點稱為 $\triangle ABC$ 的_____

鈺凡的手指頭放在_____點就可以保持平衡。



☆筆記

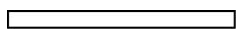
① 三角形三條_____線交於一點，這一點稱為三角形的_____也是_____

② 三角形重心位置一定在三角形的_____



牛刀小試 20

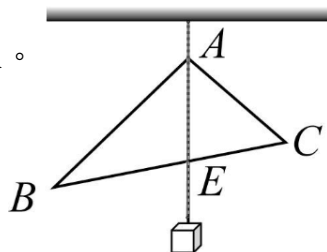
1. 下面為一個均勻木條，要撐起哪一個點才讓木條維持平衡，請用 \triangle 畫出來。



2. 在質地均勻的三角形木板的頂點 A ，穿一個小洞懸吊起來，線的另一端綁上重物自然垂下，並以虛線畫出懸掛的鉛垂線，這條線和 \overline{BC} 的交點是 E 點，請問

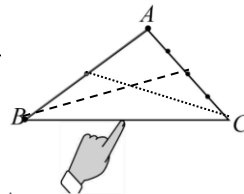
(1) D 是_____點。

(2) \overline{AE} 是_____線。



3. 有一質地均勻的紙片，若彩宣想用手指撐住紙片，讓紙片保持平衡，請問手指頭放在兩條_____線就可以保持平衡。

此點稱為 $\triangle ABC$ 的_____

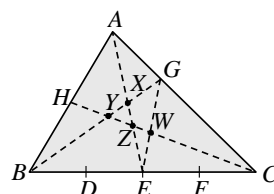


4. $\triangle ABC$ 中 D 、 E 、 F 三點將 \overline{BC} 分四等分
 $\overline{AG} : \overline{AC} = 1 : 3$ ， H 點為 \overline{AB} 的中點

(1) \overline{AB} 的中點是_____， \overline{BC} 的中點是_____

(2) 請用紅筆畫出兩條中線

(3) 圖中哪一點是 $\triangle ABC$ 的重心？答：_____。





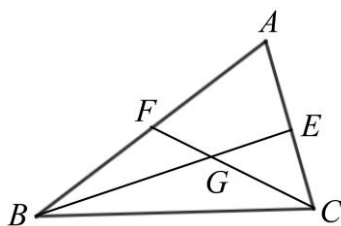
概念

11 重心到頂點的距離是中線長的三分之二



☆已知： G 是 $\triangle ABC$ 的重心

求證： $\overline{BG} = \frac{2}{3} \overline{BE}$



☆筆記

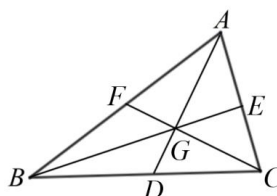


☆整理：若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，則

① $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{AD} \Rightarrow \overline{AG} : \overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$

② $\overline{BG} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{BE} \Rightarrow \overline{BG} : \overline{GE} = \underline{\hspace{1cm}}$

③ $\overline{CG} = \underline{\hspace{1cm}} \overline{CF} \Rightarrow \overline{CG} : \overline{GF} = \underline{\hspace{1cm}}$



牛刀小試 21

1. 如圖， $\triangle ABC$ 的兩中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 交於 G 點。

(1) \overline{AG} 是 \overline{AD} 的 倍

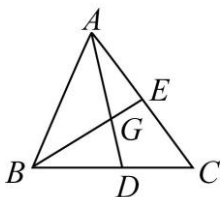
(2) \overline{GD} 是 \overline{AD} 的 倍

(3) 若 $\overline{AD} = 21$ ， $\overline{GD} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$

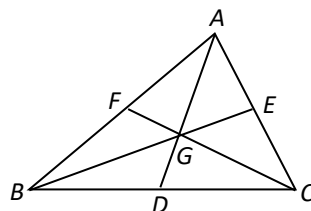
(4) \overline{BG} 是 \overline{BE} 的 倍

(5) \overline{GE} 是 \overline{BE} 的 倍

(6) 若 $\overline{BE} = 15$ ， $\overline{GE} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\overline{BG} = \underline{\hspace{1cm}}$



3. 如圖， $\triangle ABC$ 中，三條中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 交於 G 點，若 $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BE} = 12$ ， $\overline{CF} = 9$ 求 \overline{AG} 、 \overline{BG} 、 \overline{CG} 。



2. 如右圖， $\triangle ABC$ 的中線

\overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 交於

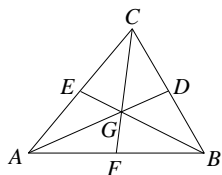
G 點。則

(1) \overline{CG} 是 \overline{FG} 的 倍

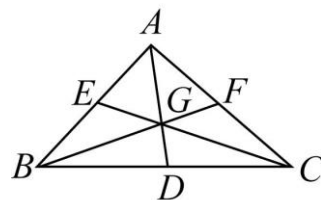
(2) 若 $\overline{FG} = 5$ ，則 $\overline{GC} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\overline{CF} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) \overline{AG} 是 \overline{DG} 的 倍

(4) 若 $\overline{DG} = 7$ ，則 $\overline{AG} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\overline{AD} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



4. 如圖， $\triangle ABC$ 中，三條中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 交於 G 點，若 $\overline{AG} = 6$ ， $\overline{BG} = 8$ ， $\overline{CG} = 10$ ，求 \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 。

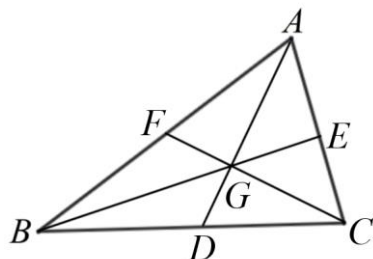




概念 12 重心與六塊積



☆已知： G 是 $\triangle ABC$ 的重心， \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 是三條中線，
求證： $\triangle AFG$ 、 $\triangle BFG$ 、 $\triangle BDG$ 、 $\triangle CDG$ 、 $\triangle CEG$ 、 $\triangle AEG$
六個小 \triangle 面積相等



☆筆記



牛刀小試 22

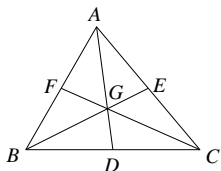
1. 如圖， \overline{AD} 、 \overline{BE} 、 \overline{CF} 三條線交於 G 點。

若 $\triangle GBD$ 面積 = 2，求下列 \triangle 面積。

(1) $\triangle GCD$ 面積 = _____。

(2) $\triangle GAC$ 面積 = _____。

(3) $\triangle ABC$ 面積 = _____。

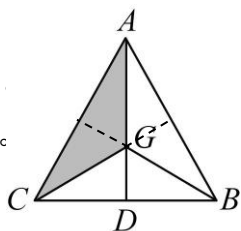


2. 如圖， G 是重心，若 $\triangle AGC$ 面積 = 6，

求下列 \triangle 面積。

(1) $\triangle GBD$ 面積 = _____。

(2) $\triangle ABC$ 面積 = _____。



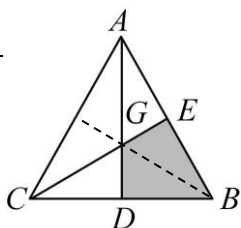
3. 如圖， \overline{AD} 、 \overline{BG} 兩條線交於 G 點。

若四邊形 $DGEB$ 面積 = 14，求

(1) $\triangle BDG$ 面積 = _____。

(2) $\triangle ABD$ 面積 = _____。

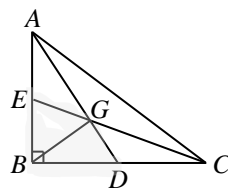
(3) $\triangle ABC$ 面積 = _____。



4. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，兩條中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 交於 G 點， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，求：

(1) $\triangle ABC$ 面積 = _____。

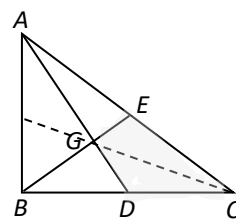
(2) 四邊形 $DGEB$ 面積 = _____。



5. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，兩條中線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 交於 G 點， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 12$ ，求：

(1) $\triangle ABC$ 面積 = _____。

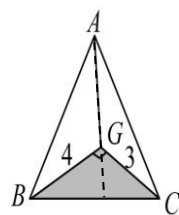
(2) 四邊形 $DGEC$ 面積 = _____。



6. 如圖， $\triangle ABC$ ， G 是重心，且 $\overline{BG} \perp \overline{GC}$ ，求

(1) $\triangle BGC$ 面積 = _____。

(2) $\triangle ABC$ 面積 = _____。





例題 11 重心性質的應用 1—直角△



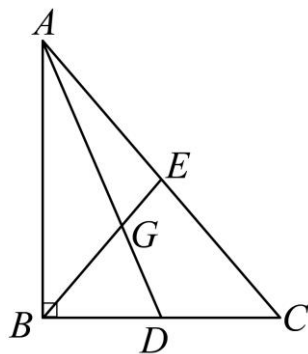
如圖，直角△ABC 中， $\angle ABC=90^\circ$ 度， \overline{AD} 、 \overline{BE} 是中線，
若 $\overline{AC}=10$ ，請問：

(1) E 點是△ABC 的_____心

(2) $\overline{BE} =$ _____

(3) G 點是△ABC 的_____心

(4) $\overline{EG} =$ _____



☆筆記



牛刀小試 23

1. 直角△ABC 中， \overline{AD} 、 \overline{BO} 是中線，

若 $\overline{AC}=12$ 。

(1) O 點是△ABC 的_____心。

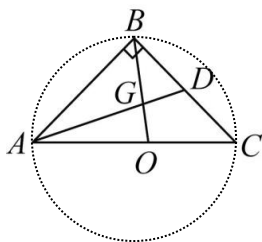
(2) \overline{AC} 是圓 O 的_____。

\overline{BO} 是圓 O 的_____。

(3) $\overline{BO} =$ _____。

(4) G 點是△ABC 的_____心。

(5) $\overline{GO} =$ _____。



2. 直角△ABC 中， \overline{BE} 、 \overline{AD} 是中線，

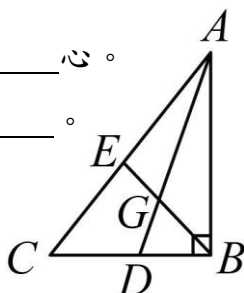
若 $\overline{AC}=30$ 。

(1) E 點是△ABC 的_____心。

(2) $\overline{BE} =$ _____。

(3) G 點是△ABC 的_____心。

(4) $\overline{GE} =$ _____。



3. 直角△ABC 中， \overline{BE} 、 \overline{AD} 是中線，

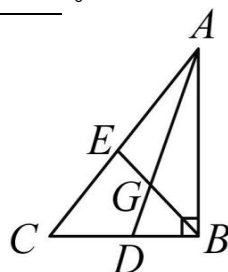
若 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AC}=8$ ，

(1) E 點是△ABC 的_____心。

(2) $\overline{AC} =$ _____， $\overline{BE} =$ _____。

(3) G 點是△ABC 的_____心。

(4) $\overline{GO} =$ _____。

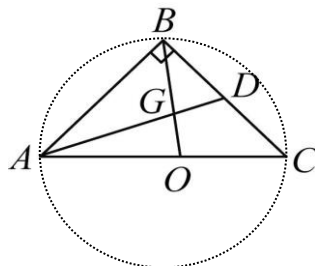


4. 直角△ABC 中， O 是外心， \overline{AD} 、 \overline{BO}

是中線，若 $\overline{GO}=3$ 。

(1) G 是_____心。

(2) $\overline{BO} =$ _____， $\overline{AC} =$ _____。





例題 12 重心性質的應用 2—平行四邊形

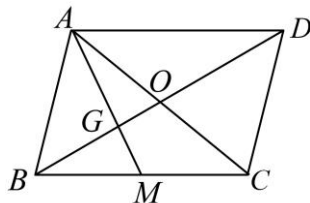


如圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點， \overline{BC} 中點為 M ， \overline{AM} 與 \overline{BD} 交於 G 點

☆筆記

(1) 若 $\overline{OG} = 3$ ，求 $\overline{BD} = ?$

(2) 若 $\triangle AOG$ 的面積是 10，求平行四邊形 $ABCD$ 的面積？



牛刀小試 24

1. 如圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點， \overline{BC} 中點為 M ， \overline{AM} 與 \overline{BD} 交於 G 點。

(1) G 點是 $\triangle ABC$ 的_____心

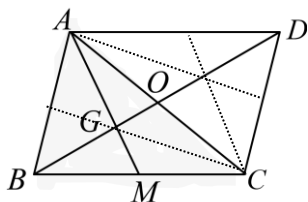
(2) 若 $\overline{GO} = 4$ ，求

$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 若 $\triangle AOG$ 的面積是 3，求

$\triangle ABC$ 面積為_____。

平行四邊形 $ABCD$ 面積為_____。



2. 如右圖，在 $\square ABCD$ 中，兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點， M 點是 \overline{BC} 的中點， \overline{AM} 與 \overline{BD} 交於 P 點。

(1) 若 $\overline{PO} = 5$ ，求

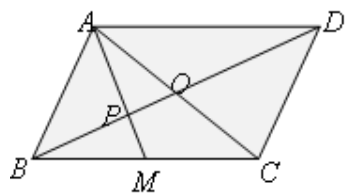
$\overline{BO} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $\triangle BPM$ 的面積是 5，求

$\triangle ABC$ 面積為_____。

平行四邊形 $ABCD$ 面積為_____。



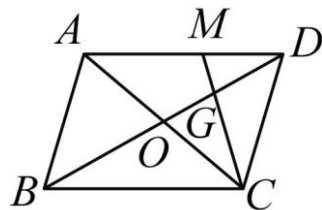
3. 如圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點， \overline{BC} 中點為 M ， \overline{AM} 與 \overline{BD} 交於 G 點。若 $\overline{DG} = 6$ ，求

(1) $\overline{DO} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若 $\triangle OCG$ 的面積是 4，求

$\triangle ABC$ 面積為_____。

平行四邊形 $ABCD$ 面積為_____。



4. 如圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 交於 O 點， E 、 F 分別是 \overline{AB} 、 \overline{AD} 的中點。

(1) 若 $\overline{DB} = 24$ ，求

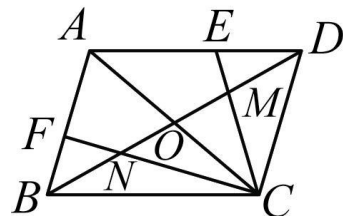
$\overline{DO} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{MO} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 若平行四邊形 $ABCD$ 的面積是 24，則

$\triangle ADC$ 面積為_____。

$\triangle MOC$ 面積 = _____。

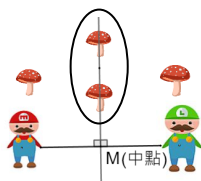




解 答 篇

牛刀小試 1

- 1.
2. 5
3. (1) 5 (2) 5 (3) =, = 到三頂點



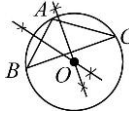
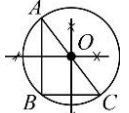
牛刀小試 2

1. (1) A、C (2) A、C (3) 略
2. (1) P (2) 外心 (3) 中垂線

牛刀小試 3

1. (1) C (2) 上 (3) 外心
2. (1) 外接圓 (2) 外 (3) 半徑, 半徑, 半徑, 三頂點, 半徑 (4) 7, 7 (5) 外心

牛刀小試 4

1.  (1) 外部 (2) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$
2.  (1) 斜邊上 (2) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

牛刀小試 5

1. (1) C (2) 中點 (3) 外心 (4) 中垂線

2. B
3. 斜邊上
4. 內部
5. 外部

牛刀小試 6

1. (1) 5 (2) 直徑 (3) $\frac{5}{2}$
2. (1) 13 (2) 直徑 (3) $\frac{13}{2}$

3. (1) 半徑 (2) 半徑 (3) 12
4. (1) 8 (2) 16

牛刀小試 7

1. (1) 150° (2) 150°
2. 134°
3. (1) 100° (2) 50°
4. 65°

牛刀小試 8

1. (1) 216° (2) 144° (3) 144°
2. (1) 300° (2) 60° (3) 60°
3. (1) 160° (2) 200° (3) 100° (4) 150° (5) 160°

牛刀小試 9

1. (1) $13^2 = 12^2 + \overline{AM}^2$
 $\overline{AM} = 5$
- (2) $\overline{BO} = x$, $\overline{OM} = x-5$
 $x^2 = 12^2 + (x-5)^2$

$$x = \frac{169}{10}$$

2. (1) $10^2 = 8^2 + \overline{AM}^2$
 $\overline{AM} = 6$
- (2) $\overline{BO} = x$, $\overline{OM} = x-5$
 $x^2 = 8^2 + (x-6)^2$
 $x = \frac{25}{3}$

牛刀小試 10

1. (1) $10^2 = 6^2 + \overline{AD}^2$
 $\overline{AD} = 8$
- (2) $\overline{BO} = x$, $\overline{OD} = 8-x$
 $x^2 = 6^2 + (8-x)^2$
 $x = \frac{25}{4}$

2. (1) $13^2 = 5^2 + \overline{AD}^2$
 $\overline{AD} = 12$

$$(2) \overline{BO} = x, \overline{OD} = 12-x$$

$$x^2 = 5^2 + (12-x)^2$$

$$x = 7\frac{1}{24} \left(\frac{169}{24} \right)$$

牛刀小試 11

1. 6, 4
2. (1) $\angle PBD$ (2) 角平分線 (3) \overline{PC}
3. (1) 角平分線 (2) 角平分線
4. B

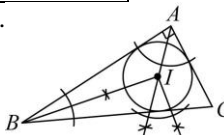
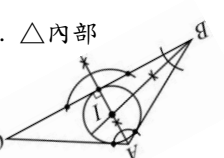
牛刀小試 12

1. \overline{IE}
- (2) \overline{IF}
- (3) \overline{ID}
- (4) $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$
距離相等
2. (1) 35° , 5 (2) 5 (3) 內心
3. B

牛刀小試 13

1. (A)(B)
2. (1) 內切 (2) 角平分 (3) 角平分 (4) \overline{ID} 、 \overline{IE} 、 \overline{IF} (5) 半徑 (6) 邊 (7) 內

牛刀小試 14

1. 
2. \triangle 內部 

牛刀小試 15

1.
 - (1) 角平分，
 - (2) 180° ， 94° ， 47° ， 133°
2.
 - (1) 略
 - (2) 130°
3. 140°
4. (1) 180° (2) 40° (3) 80° (4) 100°

牛刀小試 16

1. 15
2. 60
3. (1) 4 (2) 48 (3) 96
4. (1) 60 (2) $\frac{10}{3}$
5. (1) 6 (2) 1

牛刀小試 17

1. $4:3:5$
2. (1) $5:4:6$
(2) 12
設 $\triangle AIB$ 面積 $=5x$ ，
 $\triangle BIC$ 面積 $=4x$ ，
 $\triangle AIC$ 面積 $=6x$
 $5x+4x+6x=45$
3. $13:12:5$
4. (1) $5:6:7$
(2) $\overline{AB}=10\text{cm}$ 、 $\overline{BC}=12\text{cm}$
 $\overline{AC}=14\text{cm}$
設 $\overline{AB}=5x$ ， $\overline{BC}=6x$ ， $\overline{AC}=7x$
 $5x+6x+7x=36$

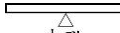
牛刀小試 18

1. 1
2. (1) 4
(2) 2
(3) 6
(4) 2
3. 3
4. (1) 15
(2) 3

牛刀小試 19

1. (1) 中線
(2) 10
2. (1) 中點
(2) 20
3. 50
4. 10

牛刀小試 20

1. 
中點
2. (1) 中 (2) 中
3. 中線，重心
4. (1) H，E

(3) Z

牛刀小試 21

1.
 - (1) $\frac{2}{3}$
 - (2) $\frac{1}{3}$
 - (3) 7，14
 - (4) $\frac{2}{3}$
 - (5) $\frac{1}{3}$
 - (6) 5，10
2.
 - (1) 2
 - (2) 10，15
 - (3) 2
 - (4) 14，21
 3. 4，8，6
 4. 9，12，15

牛刀小試 22

1.
 - (1) 2
 - (2) 4
 - (3) 12
2.
 - (1) 3
 - (2) 18
3.
 - (1) 7
 - (2) 21
 - (3) 42
4.
 - (1) 24
 - (2) 8
5.
 - (1) 30
 - (2) 10
6.
 - (1) 6
 - (2) 18

牛刀小試 23

1. (1) 外
(2) 直徑，半徑
- (3) 6
- (4) 重
- (5) 2
2. (1) 外
(2) 15
(3) 重
- (4) 5
3. (1) 外
(2) 10，5
(3) 重心
- (4) $\frac{5}{3}$

4. (1) 重心
(2) 9，18

牛刀小試 24

1. (1) 重
(2) 12，24
(3) 18，36
2. (1) 15，30
(2) 30，60
3. (1) 9，18
(2) 12，24
4. (1) 12，4
(2) 12，2