



# B5 3-1 推理證明



## 概念 ① 認識證明 1

☆已知： $\overline{AD}$  和  $\overline{BC}$  相交於  $O$  點，

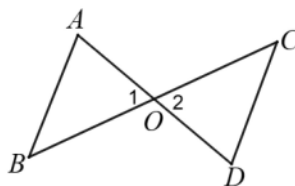
形成兩個  $\triangle OAB$  和  $\triangle OCD$

若  $\angle 1 = 50^\circ$ ，請問：

(1)  $\angle 2 =$  \_\_\_\_\_ 度。

(2)  $\angle A + \angle B =$  \_\_\_\_\_ 度。

(3)  $\angle C + \angle D =$  \_\_\_\_\_ 度。



☆不管  $\angle 1$  是幾度， $\angle A + \angle B$  都會等於  $\angle C + \angle D$  嗎？為什麼？

已知：\_\_\_\_\_

求證：\_\_\_\_\_

證明：

☆筆記

根據下面的敘述，寫出

已知和求證

等腰  $\triangle ABC$  中，

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

則  $\angle B = \angle C$

已知：

求證：



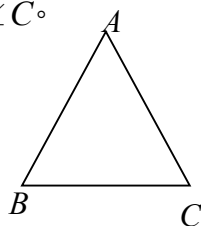
## 牛刀小試 1

請根據下列敘述，練習找出已知條件和求證。

1. 若  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則  $\angle B = \angle C$ 。

已知：

求證：

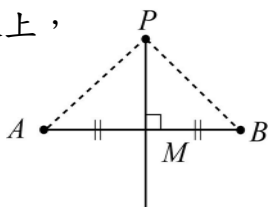


2. 若  $P$  在  $\overline{AB}$  的垂直平分線上，

則  $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

已知：

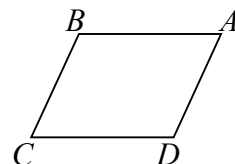
求證：



3. 若  $ABCD$  為平行四邊形，則對角相等。

已知：

求證：



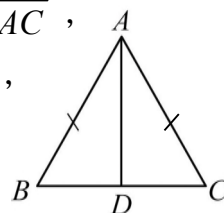
4. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

$\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的角平分線，

則  $\overline{BD} = \overline{CD}$ 。

已知：

求證：

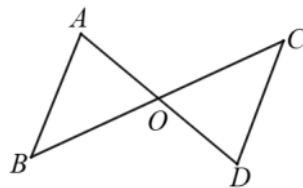




已知： $\overline{AD}$  和  $\overline{BC}$  相交於  $O$  點，形成兩個  $\triangle OAB$  和  $\triangle OCD$

求證： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

證明：



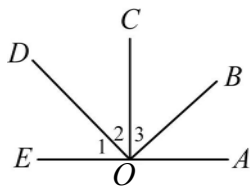
☆筆記

證明就是\_\_\_\_\_



## 牛刀小試 2

1. 已知： $\overline{OC} \perp \overline{EA}$ ， $\overline{OB} \perp \overline{OD}$



求證： $\angle 1 = \angle 3$

證明： $\because \overline{OC} \perp$  \_\_\_\_\_

$\therefore \angle 1 + \angle 2 =$  \_\_\_\_\_ 度

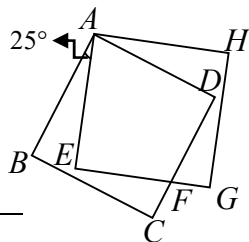
$\because \overline{OB} \perp$  \_\_\_\_\_

$\therefore \angle 2 + \angle 3 =$  \_\_\_\_\_ 度

推得  $\angle 1 + \angle 2 =$  \_\_\_\_\_

故  $\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_

2. 如圖，正方形  $ABCD$ 、 $AEGH$  交於  $A$  點，  
若  $\angle BAE = 25^\circ$ ，則



(1)  $\angle DAE =$  \_\_\_\_\_

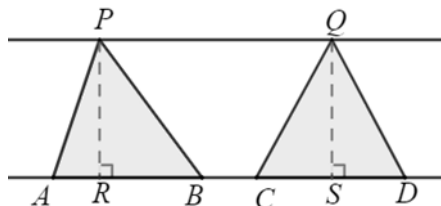
(2)  $\angle DAH =$  \_\_\_\_\_

(3)  $\angle EFD =$  \_\_\_\_\_

3. 已知： $L \parallel M$  且， $\overline{PR} \perp M$ ， $\overline{QS} \perp M$

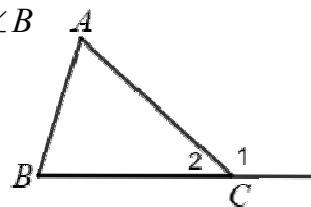
且  $\overline{AB} = \overline{CD}$

求證： $\triangle PAB$  面積  $= \triangle QCD$  面積



4. 已知： $\angle 1$  為  $\triangle ABC$  的外角，

求證： $\angle 1 = \angle A + \angle B$





如圖： $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$ ， $D$  是  $\overline{BC}$  的中點

證明： $\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的角平分線

思考過程

1. 證明： $\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的角平分線

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

2. 已知：

證明過程

①  $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

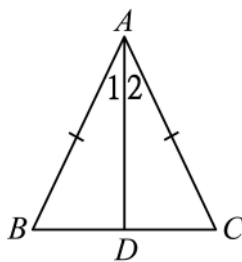
②  $D$  是  $\overline{BC}$  的中點

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

③ 隱藏條件

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

3. 利用 \_\_\_\_\_ 來證明



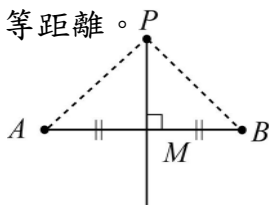
☆筆記  
證明要寫什麼？



### 牛刀小試 3

1. 已知  $\overleftrightarrow{PM}$  為  $\overline{AB}$  的垂直平分線。

求證： $P$  點到  $\overline{AB}$  兩端點等距離。



思考過程

(1) 證明： $P$  點到  $\overline{AB}$  兩端點等距離。

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(2) 已知：

①  $\overleftrightarrow{PM}$  為  $\overline{AB}$  的垂直平分線。

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

② 隱藏條件：

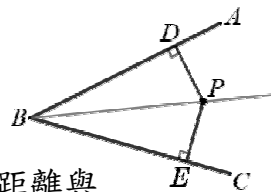
$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(3) 利用 \_\_\_\_\_ 來證明。

證明過程

2. 已知  $P$  點是  $\angle ABC$  的角平分線上任一點。

證明： $P$  點到  $\overline{AB}$  的距離與  $P$  點到  $\overline{BC}$  的距離相等。



思考過程

(1) 證明： $P$  點到  $\overline{AB}$  的距離與  $P$  點到  $\overline{BC}$  的距離相等。

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(2) ① 已知  $P$  是  $\angle ABC$  的角平分線

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

② 隱藏條件  $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(3) 利用 \_\_\_\_\_ 來證明。

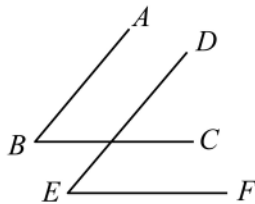
證明過程



# 例題 ① 利用平行線性質證明 1——同位角



已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$  求證： $\angle B = \angle E$



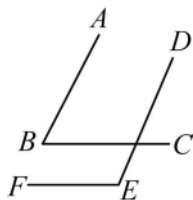
☆筆記

☆

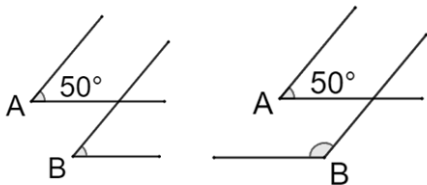


## 牛刀小試 4

1.  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，  
求證  $\angle B + \angle E = 180^\circ$ 。



2. 已知  $\angle A$  和  $\angle B$  兩邊分別平行，  
若  $\angle A = 50^\circ$ ，則  $\angle B =$  \_\_\_\_\_ 度。



3. 已知  $\angle A$  和  $\angle B$  兩邊分別平行，  
若  $\angle A = 80^\circ$ ，則  $\angle B =$  \_\_\_\_\_ 度。  
(畫畫看)

4. 已知： $L \parallel M$ ，

求證  $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$

證明：

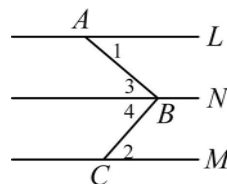
過  $B$  點作一直線  $N \parallel L$ ，則  $N \parallel L \parallel M$

$\therefore \angle 3 = \angle$  \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ 角)

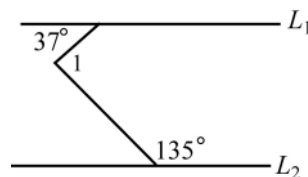
$\angle 4 = \angle$  \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ 角)

因此  $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 =$  \_\_\_\_\_

故  $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$



5. 如右圖， $L_1 \parallel L_2$ ，則  $\angle 1 =$  \_\_\_\_\_ 度。





## 例題 ② 利用平行線性質證明 2——平行四邊形



請證明平行四邊形對角相等

已知：\_\_\_\_\_

求證：\_\_\_\_\_

證明：



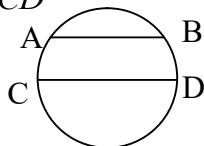
☆筆記



### 牛刀小試 5

1. 已知：圓內有兩條弦  $\overline{AB}$  和  $\overline{CD}$

且  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，



求證： $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

證明：

① 連  $\overline{AD}$

②  $\because \overline{AB} \parallel$  \_\_\_\_\_

$\therefore \angle ADC = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)

③  $\widehat{AC} = 2\angle ADC = 2\angle$  \_\_\_\_\_  
= \_\_\_\_\_。

2. 如圖， $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\overline{CD}$  為  $\angle C$  的角平分線，則下列哪一個選項不一定正確？

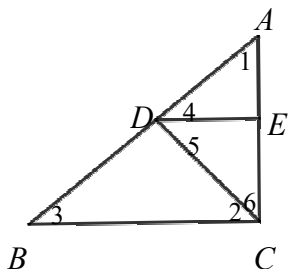
(A)  $\angle 2 = \angle 6$

(B)  $\angle 2 = \angle 5$

(C)  $\angle 5 = \angle 6$

(D)  $\angle 3 = \angle 4$

(E)  $\angle 4 = \angle 5$



3. 已知：梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

且  $\overline{AC}$  為  $\angle C$  的角平分線，

試證： $\overline{AB} = \overline{BC}$

證明：

①  $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\therefore \angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)

②  $\because \overline{AC}$  為  $\angle C$  角平分線

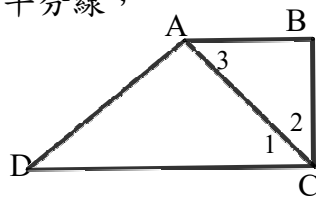
$\therefore \angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_，

由①和②推得  $\angle 2 = \angle$  \_\_\_\_\_

③  $\triangle ABC$  中

$\therefore \angle 2 = \angle$  \_\_\_\_\_

故  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_。



★4. 如圖， $\overline{BI}$ 、 $\overline{CI}$  分別為  $\angle B$  和  $\angle C$  的角平分線，且  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，若  $\overline{AD} = 6$ ，

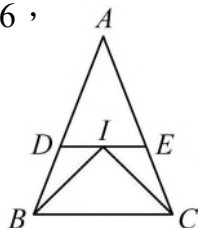
$\overline{BD} = 2$ ， $\overline{AE} = 7$ ， $\overline{EC} = 3$ ，

則  $\triangle ADE$  周長 = ?

①  $\overline{DI} =$  \_\_\_\_\_。

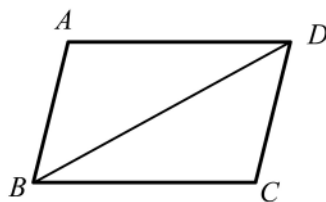
②  $\overline{EI} =$  \_\_\_\_\_。

③  $\triangle ADE$  周長 \_\_\_\_\_



**例題****③****利用三角形的全等性質證明 1——平行四邊形**已知：四邊形  $ABCD$  是平行四邊形求證： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ 

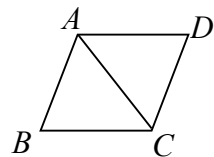
證明：



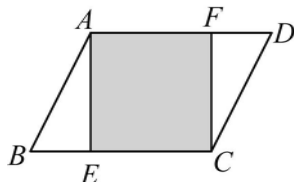
☆筆記

**牛刀小試 6**

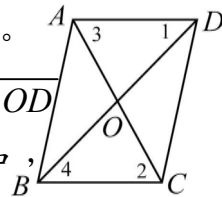
1. 如右圖，已知
- $\triangle ADB$
- 和
- $\triangle CDB$
- 中，

 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且  $\angle BAC = \angle ACD$ 。試證  $\angle B = \angle D$ 。證明： $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  中 $\therefore$  ①  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$  (已知)②  $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$  (已知)③  $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$  (公用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$  (\_\_\_\_\_全等性質)故  $\angle B = \angle \underline{\hspace{2cm}}$  (對應角相等)。

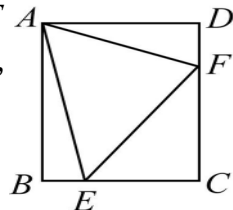
2. 如右圖，在四邊形
- $ABCD$
- 中，

有一正方形  $AECF$ 。且  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，試證  $\angle B = \angle D$ 。證明： $\triangle ABE$  和  $\triangle CDF$  中 $\therefore$  ①  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ②  $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $AECF$  是正方形)③  $\angle AEB = \angle \underline{\hspace{2cm}} = 90^\circ$  $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$  (\_\_\_\_\_全等)故  $\angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ 

3. 證明平行四邊形兩對角線互相平分。

已知： $ABCD$  為平行四邊形。求證： $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ 證明：在  $\triangle OAD$  和  $\triangle OCB$  中， $\therefore ABCD$  為平行四邊形①  $\angle 1 = \angle 4$  (\_\_\_\_\_角相等)②  $\angle 3 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$  (\_\_\_\_\_角相等)③  $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$  (對邊相等) $\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCB$  (\_\_\_\_\_全等性質)故  $\overline{OA} = \underline{\hspace{2cm}}$  $\overline{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$  (對應邊相等)

4. 如右圖，已知正方形
- $ABCD$
- ，
- $\triangle AEF$
- 為正三角形。

證明  $\angle BAE = \angle DAF$ 證明：在  $\triangle ABE$  與  $\triangle ADF$  中， $\therefore$  ①  $\underline{\hspace{2cm}} = \overline{AD}$  (正方形)②  $\underline{\hspace{2cm}} = \angle D = 90^\circ$ ③  $\underline{\hspace{2cm}} = \overline{AF}$  ( $\triangle AEF$  為正三角形) $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$  (\_\_\_\_\_全等性質)故  $\underline{\hspace{2cm}} = \angle DAF$  (對應角相等)

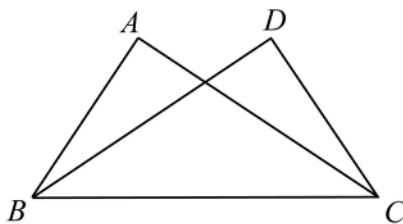
**例題****4****利用三角形的全等性質證明 2——重疊圖形**

如圖，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

已知： $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$

求證： $\angle A = \angle D$

證明：

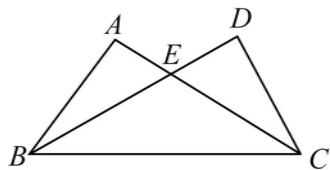


☆筆記

**牛刀小試 7**

1.  $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，

求證： $\angle ACB = \angle DBC$



2. 已知： $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$

證明：在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

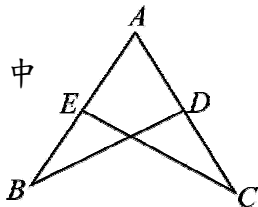
①  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

②  $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$

③  $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$  (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$  (\_\_\_\_全等)

故  $\overline{BD} = \overline{CE}$

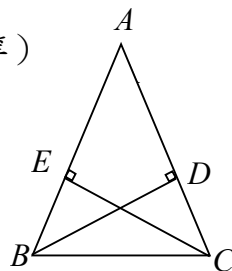


3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{CE} \perp \overline{AB}$

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$

(等腰 $\triangle$ 中，腰上的高相等)



4. (1) 已知： $\triangle ABC$ 與 $\triangle BPQ$ 均為正 $\triangle$

求證： $\angle AQB = \angle BPC$

證明：在 $\triangle AQB$ 與 $\triangle CBP$ 中

①  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

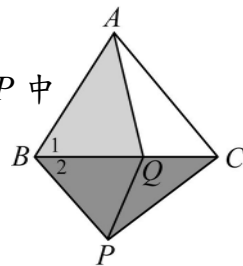
( $\because \triangle ABC$  是正 $\triangle$ )

②  $\angle 1 = \underline{\hspace{2cm}} = 60^\circ$

③  $\overline{BQ} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $\because \triangle BPQ$  是正 $\triangle$ )

$\triangle AQB \cong \triangle CBP$  (\_\_\_\_全等)

所以  $\angle AQB = \angle BPC$



(2) 若  $\angle AQB = 100^\circ$ ，

則  $\angle BPC = \underline{\hspace{2cm}}$  度， $\angle QPC = \underline{\hspace{2cm}}$  度。



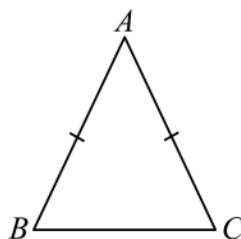
# 例題 5 利用三角形的全等性質證明 3——輔助線



已知： $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$

求證： $\angle B = \angle C$

證明：



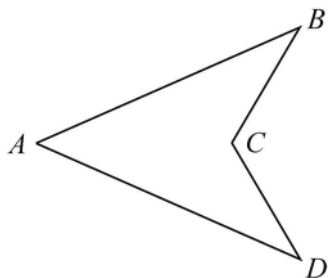
☆筆記



## 牛刀小試 8

1.  $\overline{AB} = \overline{AD}$  ,  $\overline{BC} = \overline{CD}$

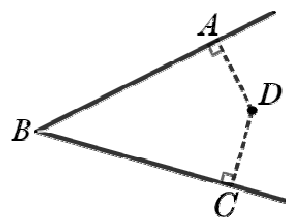
(1) 求證  $\angle ABC = \angle ADC$



(2) 由上題中，若  $\angle BAC = 25^\circ$   
 $\angle CDA = 38^\circ$ ，則  $\angle BCD = ?$

2. 四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ，  
 $\overline{CD} \perp \overline{BC}$

(1) 證明  $\overline{AD} = \overline{CD}$



(2) 承上題，已知  $\overline{AD} = \overline{CD} = 8$ ，  
 $\overline{BC} = 15$ ， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，  
求四邊形  $ABCD$  面積。

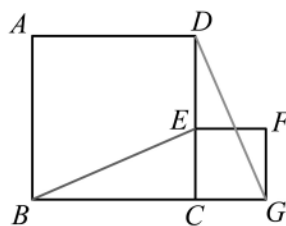


**例題****6****利用三角形的全等性質證明 4——正方形**

已知：四邊形  $ABCD$  和四邊形  $CEFG$  都是正方形，  
而且  $E$  在  $\overline{CD}$  上

求證： $\overline{BE} = \overline{DG}$

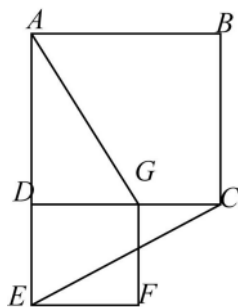
證明：



☆筆記

**牛刀小試 9**

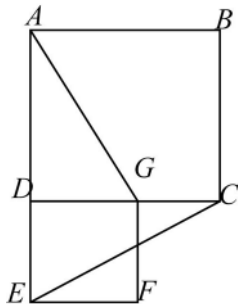
1. 已知：四邊形  $ABCD$  和四邊形  $DEFG$  都是正方形。求證  $\overline{AG} = \overline{CE}$ 。



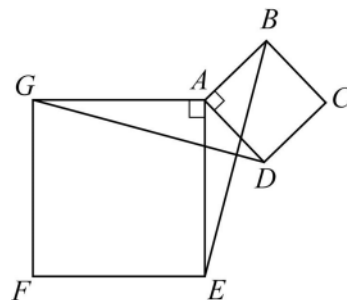
2. 已知：四邊形  $ABCD$  和四邊形  $DEFG$  都是正方形。若  $\overline{DG} = 5$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

(1)  $\overline{AG} =$  \_\_\_\_\_

(2)  $\overline{CE} =$  \_\_\_\_\_



- ★3. 已知：正方形  $ABCD$  和正方形  $AEFG$ ，  
求證  $\overline{BE} = \overline{GD}$ 。



- ★4. 已知：正方形  $ABCD$  和正方形  $DEFG$ ，  
 $\angle ACB = 90^\circ$ ，若  $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{AB} = 5$ ，求

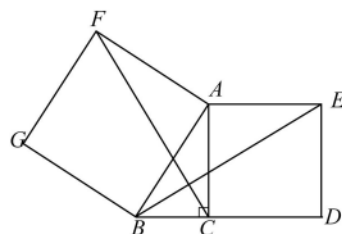
(1)  $\overline{AC} =$  \_\_\_\_\_

(2)  $\overline{DE} =$  \_\_\_\_\_

(3)  $\overline{BD} =$  \_\_\_\_\_

(4)  $\overline{BE} =$  \_\_\_\_\_

(5)  $\overline{CF} =$  \_\_\_\_\_

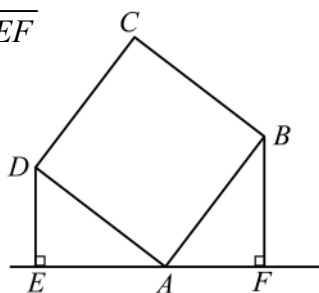


**例題****7****利用三角形的全等性質證明 5——直角三角形**

已知： $ABCD$  是正方形，而且  $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{EF}$

求證： $\overline{DE} = \overline{AF}$

證明：



☆筆記

**牛刀小試 10**

1. 四邊形  $ABCD$  為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

$\overline{BF} \perp \overline{CF}$

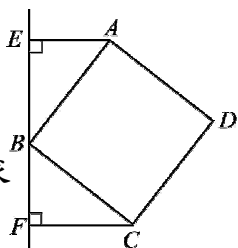
(1) 試證： $\overline{AE} = \overline{BF}$

(2)  $\overline{AE} = 3$ ， $\overline{CF} = 4$ ，求

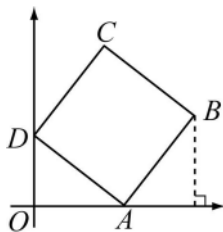
①  $\overline{BF} =$  \_\_\_\_\_，

②  $\overline{BC} =$  \_\_\_\_\_，

③  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_。

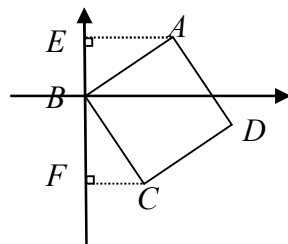


2. 四邊形  $ABCD$  為正方形，若  $A$  點坐標  $(12, 0)$ ， $D$  點坐標  $(0, 5)$ ，求  $B$  點坐標。



3. 四邊形  $ABCD$  為正方形，若  $\overline{CB} = 13$ ，

$\overline{AE} = 12$ ，求  $C$  坐標。



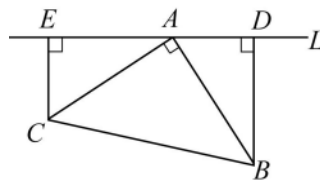
★4. 如右圖， $\overline{BD} \perp L$ ， $\overline{EC} \perp L$ ， $\angle BAC =$

$90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，若  $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AE} = 4$ ，

則  $\overline{BD} =$  \_\_\_\_\_，

$\overline{AC} =$  \_\_\_\_\_，

$\overline{BC} =$  \_\_\_\_\_。



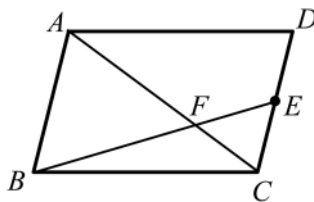


## 例題 8 利用相似性質來證明



已知：如圖，在  $\square ABCD$  中， $E$  為  $\overline{CD}$  中點， $\overline{BE}$  和  $\overline{AC}$  交於  $F$

求證： $\overline{AF} = 2 \overline{CF}$



☆筆記

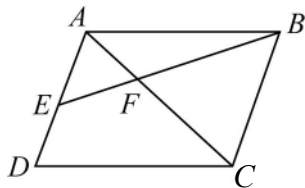


## 牛刀小試 11

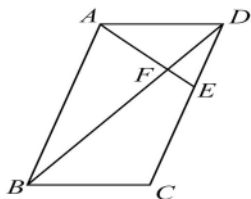
1. 如圖，平行四邊形  $ABCD$  中，已知  $E$  為  $\overline{AD}$  的中點， $\overline{AC}$  與  $\overline{BE}$  交於  $F$  點，求證：

(1)  $\triangle AEF \sim \triangle CBF$ 。

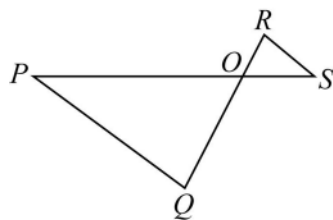
(2)  $\overline{CF} = 2 \overline{AF}$ 。



2. 如圖，平行四邊形  $ABCD$  中，  
 $\overline{DE} : \overline{EC} = 1 : 2$ ，且  $\overline{AE}$  與  $\overline{BD}$  交於  $F$ ，  
 若  $\overline{AF} = 6$ ，則  $\overline{EF} =$  \_\_\_\_\_。



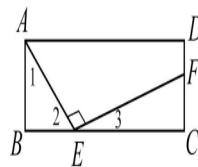
3. 如圖， $\overline{PS}$  與  $\overline{QR}$  交於  $O$  點， $\overline{OP} = 3 \overline{OS}$ ，  
 $\overline{OQ} = 3 \overline{OR}$ ，求證： $\overline{PQ} = 3 \overline{RS}$ 。



- ★4. 已知長方形  $ABCD$  中， $\angle AEF = 90^\circ$ ，  
 試證  $\triangle ABE \sim \triangle ECF$ 。

證明

- (1) 在  $\triangle ABE$  中  
 $\angle 1 + \angle 2 =$  \_\_\_\_\_  
 又  $\angle AEF = 90^\circ$   
 $\therefore \angle 3 + \angle 2 =$  \_\_\_\_\_，  
 推得  $\angle 1 =$  \_\_\_\_\_



- (2)  $\triangle ABE$  和  $\triangle ECF$  中  
 ①  $\angle 1 =$  \_\_\_\_\_  
 ②  $\angle B =$  \_\_\_\_\_  
 $\triangle ABE \sim \triangle ECF$  (\_\_\_\_\_ 相似)



舉例：

1. 偶數：\_\_\_\_\_

☆換個寫法：\_\_\_\_\_

問題：有沒有辦法可以寫出世界上所有的偶數？

2. 奇數：\_\_\_\_\_

☆換個寫法：\_\_\_\_\_

問題：有沒有辦法可以寫出世界上所有的奇數？

☆筆記

① 0 是奇數還是偶數？

② 3 的倍數如何表示？



### 牛刀小試 12

1. (1)如何表示 0、2、4、6、……所有的數？

(2)如何表示 1、3、5、7、9…所有的數？

3. 如何表示下列所有的數

(1) 4、7、10、13……

(2) 6、11、16、21、26、31……

2. (1)如何表示 3、6、9、12…所有的數？

(2)如何表示 5、10、15、20…所有的數？

4. (1)被 4 整除的數，如何表示？

(2)被 4 除餘 1 的數，如何表示？

(3)被 4 除餘 2 的數，如何表示？

(4)被 4 除餘 3 的數，如何表示？

**例題****9****代數證明 1——奇數和偶數**

已知： $a$  是一個奇數

求證： $a^2$  也是奇數

證明：

☆筆記

**牛刀小試 13**

1. 已知： $a$  是偶數。

求證： $a^2$  也是偶數。

2. 若  $a$  為奇數。

試證： $a+1$  為偶數。

3. 若  $a$  是整數，則(請填奇數或偶數)

(1)  $2a$  為\_\_\_\_\_

(2)  $2a+1$  為\_\_\_\_\_

(3)  $2a+2$  為\_\_\_\_\_

(4)  $2(a+3)$  為\_\_\_\_\_

4. 若  $b$  是奇數，則(請填奇數或偶數)

(1)  $b+1$  為\_\_\_\_\_

(2)  $b+2$  為\_\_\_\_\_

(3)  $2b$  為\_\_\_\_\_

(4)  $2b+3$  為\_\_\_\_\_

5. 若  $c$  是偶數，則 (請填奇數或偶數)

(1)  $c+1$  為\_\_\_\_\_

(2)  $c+2$  為\_\_\_\_\_

(3)  $3c$  為\_\_\_\_\_

(4)  $3c+3$  為\_\_\_\_\_



## 例題 10 代數證明 2——比大小



已知： $a$ 、 $b$  是正數，而且  $a > b$

求證： $a^2 > b^2$

證明：

☆筆記

若  $a$ 、 $b$  是正數， $a^2 > b^2$

則  $a \square b$



### 牛刀小試 14

1. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1)  $7 \square 3 \Rightarrow 7^2 \square 3^2$

(2)  $2 \square 5 \Rightarrow 2^2 \square 5^2$

2. (1)  $(-7) \square (-3) \Rightarrow (-7)^2 \square (-3)^2$

(2)  $(-2) \square (-5) \Rightarrow (-2)^2 \square (-5)^2$

3. 已知： $a$ 、 $b$  為負數，且  $a < b$ 。

求證： $a^2 > b^2$

證明：

$$\because a < b < 0 \quad \therefore a - b \square 0,$$

$$\because a、b \text{ 為負數} \quad \therefore a + b \square 0$$

$$a^2 - b^2 = (\square)(\square) \square 0$$

$$\text{故 } a^2 > b^2$$

4. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1)  $5^2 \square 4^2$ ，但  $5 \square 4$

(2)  $3^2 \square 7^2$ ，但  $3 \square 7$

5. (1)  $(-5)^2 \square (-2)^2$ ，但  $(-5) \square (-2)$

(2)  $(-3)^2 \square (-7)^2$ ，但  $(-3) \square (-7)$

6. 已知： $a$ 、 $b$  為負數，且  $a^2 < b^2$ 。

試證： $a > b$

證明：

$$a^2 < b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 \square 0,$$

$$\Rightarrow (a + b)(a - b) \square 0$$

$\because a、b$  為負數

$$\therefore a + b \square 0$$

$$\text{推得 } a - b \square 0$$

$$\text{故 } a \square b$$



## 例題 11 代數證明 3——畢氏定理



已知： $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為直角 $\triangle$ 的三邊長，而且  $c$  是斜邊  
(其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是正整數)

求證： $a^2$  是  $(b+c)$  的倍數

證明：

☆筆記  
因數和倍數



### 牛刀小試 15

1. 已知： $a$  和  $b$  是正整數，且  $a^2 = b^2 - 3^2$   
求證： $a^2$  是  $(b+3)$  的倍式。

3. 在直角 $\triangle$ 中， $a$  為斜邊長， $b$ 、 $3$  為兩股長。  
其中  $a$ 、 $b$  為正整數，請問  $a+b$  是下列哪一個數的因數？

(A) 7 (B) 8 (C) 9

2. 已知： $a$  和  $b$  是正整數，且  $a^2 + 5^2 = b^2$ ，  
求證： $a^2$  是  $(b+5)$  的倍數。

4. 已知直角 $\triangle$ 中， $b$  為斜邊長， $a$ 、 $7$  為兩股長，其中  $a$ 、 $b$  為正整數，則  $a+b$  為下列哪一個因數？

(A) 25 (B) 36 (C) 49



# 解 答 篇

## 牛刀小試 1

- 已知:  $\overline{AB} = \overline{AC}$   
求證:  $\angle B = \angle C$
- 已知:  $P$  在  $\overline{AB}$  的中垂線上  
( $\overline{AM} = \overline{BM}$ ,  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ )  
求證:  $\overline{PA} = \overline{PB}$
- 已知:  $ABCD$  為平行四邊形  
求證: 對角相等  
( $\angle A = \angle C$ ,  $\angle B = \angle D$ )
- 已知:  $\overline{AB} = \overline{AC}$   
 $\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的角平分線  
( $\angle BAD = \angle CAD$ )  
求證:  $\overline{BD} = \overline{CD}$

## 牛刀小試 2

- $\because \overline{OC} \perp \overline{AE}$   
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$   
 $\because \overline{OB} \perp \overline{OD}$   
 $\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$   
故  $\angle 1 = \angle 3$
- (1)  $65^\circ$  (2)  $25^\circ$  (3)  $115^\circ$
- (1)  $\because L \parallel M$ ,  $\overline{PR} \perp M$ ,  $\overline{QS} \perp M$   
 $\therefore \overline{PR} = \overline{QS}$   
(2)  $\triangle PAB$  面積 =  $\frac{\overline{AB} \times \overline{PR}}{2}$   
 $\triangle QCD$  面積 =  $\frac{\overline{AC} \times \overline{QS}}{2}$   
(3)  $\because \overline{AB} = \overline{AC}$ ,  $\overline{PR} = \overline{QS}$   
 $\therefore \triangle PAB$  面積 =  $\triangle QCD$  面積
- $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$   
 $\angle A + \angle B + \angle 2 = 180^\circ$   
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle A + \angle B + \angle 2$   
故  $\angle 1 = \angle A + \angle B$

## 牛刀小試 3

- (1)  $\overline{PA} = \overline{PB}$   
(2) ①  $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{AM} = \overline{BM}$   
②  $\overline{PM} = \overline{PM}$   
(3) SAS 全等性質  
證明過程  
 $\triangle PAM$  和  $\triangle PBM$  中  
 $\because \overleftrightarrow{PM}$  為  $\overline{AB}$  的垂直平分線  
 $\therefore$  ①  $\overline{AM} = \overline{BM}$ ,  
②  $\angle PMA = \angle PMB = 90^\circ$   
③  $\overline{PM} = \overline{PM}$  (共用邊)

$PAM \cong \triangle PBM$  (SAS 全等)  
故  $\overline{PA} = \overline{PB}$

- (1)  $\overline{PD} = \overline{PE}$   
(2) ①  $\angle DBP = \angle EBP$   
②  $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{PE} \perp \overline{BC}$   
 $\overline{BP} = \overline{BP}$  (共用邊)  
(3) AAS 全等性質  
證明過程  
 $\triangle DBP$  和  $\triangle EBP$  中  
(1)  $\because P$  是  $\angle ABC$  的角平分線  
 $\therefore \angle DBP = \angle EBP$   
(2)  $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$   
(3)  $\overline{BP} = \overline{BP}$  (共用邊)  
 $\triangle DBP \cong \triangle EBP$  (AAS 全等)  
故  $\overline{PD} = \overline{PE}$

## 牛刀小試 4

- $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE}$   
 $\therefore \angle ABC + \angle 1 = 180^\circ$  (同側內角)  
 $\therefore \overline{BC} \parallel \overline{EF}$   
 $\therefore \angle 1 = \angle E$  (同位角)  
故  $\angle B + \angle E = 180^\circ$
- $50^\circ$  或  $130^\circ$
- $80^\circ$  或  $100^\circ$
- $\therefore \angle 3 = \angle 1$  (內錯角相等)  
 $\angle 4 = \angle 2$  (內錯角相等)  
因此  $\angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$   
故  $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2$
- 82

## 牛刀小試 5

- ②  $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
 $\therefore \angle ADC = \angle BAD$  (內錯角相等)
- ③  $\widehat{AC} = 2\angle ADC = 2\angle BAD = \widehat{BD}$
- E
- ①  $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$   
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$  (內錯角相等)  
②  $\because \overline{AC}$  為  $\angle C$  角平分線  
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ,  
推得  $\angle 2 = \angle 3$   
③  $\triangle ABC$  中  
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$   
故  $\overline{AB} = \overline{BC}$

4.2, 3, 18

## 牛刀小試 6

- $\overline{DC}$ ,  $\angle DCA$ ,  $\overline{AC}$  SAS,  $\angle D$
- $\overline{CD}$ ,  $\overline{CF}$ ,  $\angle CFD$ , RHS,  $\angle D$
- 內錯角,  $\angle 2$ , 內錯角,  $\overline{BC}$ ,  
ASA,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$
- $\overline{AB}$ ,  $\angle B$ ,  $\overline{AE}$ , RHS,  $\angle BAE$

## 牛刀小試 7

- $\triangle ABC$  和  $\triangle DCB$  中  
①  $\overline{AB} = \overline{DC}$   
②  $\overline{AC} = \overline{BD}$   
③  $\overline{BC} = \overline{BC}$   
 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$  (SSS 全等)  
故  $\angle ACB = \angle DBC$
- $\triangle ABD$  和  $\triangle AEC$  中  
①  $\overline{AB} = \overline{AC}$   
②  $\overline{AD} = \overline{AE}$   
③  $\angle A = \angle A$  (共用角)  
 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$  (SAS 全等)  
故  $\overline{BD} = \overline{CE}$

- 在  $\triangle ABD$  與  $\triangle ACE$  中  
 $\because$  ①  $\overline{AB} = \overline{AC}$   
②  $\angle ADE = \angle AEC = 90^\circ$   
( $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ,  $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ )  
③  $\angle A = \angle A$  (共用角)  
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$  (AAS 全等)

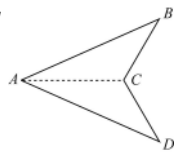
- (1) 在  $\triangle AQB$  與  $\triangle CBP$  中  
 $\because$  ①  $\overline{AB} = \overline{AC}$  ( $\triangle ABC$  是正  $\triangle$ )  
②  $\angle 1 = \angle 2 = 60^\circ$   
③  $\overline{BQ} = \overline{BP}$  ( $\triangle BPQ$  是正  $\triangle$ )  
 $\therefore \triangle AQB \cong \triangle CPB$  (SAS 全等)  
(2) 100, 40

## 牛刀小試 8

- (1) 連  $\overline{AC}$   
在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADC$   
 $\because$  ①  $\overline{AB} = \overline{AD}$   
②  $\overline{BC} = \overline{DC}$   
③  $\overline{AC} = \overline{AC}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$  (SSS 全等)  
故  $\angle ABC = \angle ADC$

(2) 126 度





2.(1)連  $\overline{BD}$

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle CBD$

$$\therefore \textcircled{1} \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\textcircled{2} \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$$

$$\textcircled{3} \overline{BD} = \overline{BD} \text{ (共用邊)}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$  (RHS 全等)

$$\text{故 } \overline{AD} = \overline{DC}$$

(2) 120

#### 牛刀小試 9

1. 在  $\triangle ADG$  和  $\triangle CDE$

$$\therefore \textcircled{1} \overline{AD} = \overline{DC}$$

$$\textcircled{2} \overline{DG} = \overline{DE}$$

$$\textcircled{3} \angle ADG = \angle CDE = 90^\circ$$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE$  (SAS 全等)

$$\text{故 } \overline{AG} = \overline{CE}$$

2. (1) 13 (2) 13

3.  $\triangle GAD$  和  $\triangle EAB$

$$\textcircled{1} \overline{AG} = \overline{AE}$$

$$\textcircled{2} \overline{AD} = \overline{AB}$$

$$\textcircled{3} \angle GAD = 90^\circ + \angle EAD = \angle EAB$$

$\triangle GAD \cong \triangle EAB$  (SAS 全等)

$$\text{故 } \overline{BE} = \overline{GD}$$

4. (1) 4 (2) 4 (3) 7 (4)  $\sqrt{65}$  (5)  $\sqrt{65}$

#### 牛刀小試 10

1. (1) 在  $\triangle AEB$  和  $\triangle BFC$

$$\therefore \textcircled{1} \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\textcircled{2} \angle AEB = \angle BFC$$

$$\textcircled{3} \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\text{又 } \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle BFC$  (AAS 全等)

$$\text{故 } \overline{AE} = \overline{BF}$$

(2) 3, 5, 5

2. (17, 12)

3. (5, -12)

4. 4, 5,  $5\sqrt{2}$

#### 牛刀小試 11

1.  $\triangle AEF$  和  $\triangle CBE$

$$(1) \therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\therefore \angle EAF = \angle BCF \text{ (內錯角)}$$

$$(2) \angle AFE = \angle BFC \text{ (對頂角)}$$

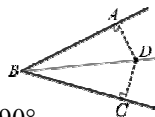
$$\triangle AEF \sim \triangle CBE \text{ (AA 相似)}$$

$$\therefore \overline{AF} : \overline{FC} = \overline{AE} : \overline{BC}$$

$$= 1 : 2$$

$$\text{故 } \overline{FC} = 2\overline{AF}$$

2. 2



3. 在  $\triangle OPQ$  和  $\triangle ORS$  中

$$\therefore \textcircled{1} \overline{OP} = 3\overline{OS}$$

$$\textcircled{2} \overline{OQ} = 3\overline{OR}$$

$$\textcircled{3} \angle POQ = \angle SOR \text{ (對頂角)}$$

$\therefore \triangle OPQ \sim \triangle ORS$  (SAS 相似)

$$\text{故 } \overline{PQ} = 3\overline{RS}$$

4. (1) 在  $\triangle ABE$  中,  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$$\angle AEF = 90^\circ, \angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\text{推得 } \angle 1 = \angle 3$$

(2) 在  $\triangle ABE$  和  $\triangle ECF$  中

$$\textcircled{1} \angle 1 = \angle 3$$

$$\textcircled{2} \angle B = \angle C = 90^\circ$$

$\triangle ABE \sim \triangle ECF$  (AA 相似)

#### 牛刀小試 12

1. (1)  $2n$  ( $n$  為 0 或正整數)

(2)  $2n+1$  ( $n$  為 0 或正整數)

[或  $2n-1$  ( $n$  為正整數)]

2. (1)  $3n$  ( $n$  為正整數)

(2)  $5n$  ( $n$  為正整數)

3. (1)  $3n+1$  ( $n$  為正整數)

(2)  $5n+1$  ( $n$  為正整數)

4. (1)  $4n$  ( $n$  為整數)

(2)  $4n+1$  ( $n$  為整數)

(3)  $4n+2$  ( $n$  為整數)

(4)  $4n+3$  ( $n$  為整數)

#### 牛刀小試 13

1.  $\therefore a$  是偶數

$$\text{設 } a = 2n \text{ (} n \text{ 為整數)}$$

$$a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$$

其中  $2n^2$  是整數

$\therefore a^2$  也是偶數

2.  $\therefore a$  是奇數, 設  $a = 2n+1$

( $n$  為整數)

$$a+1 = 2n+1+1$$

$$= 2n+2$$

$$= 2(n+1)$$

其中  $n+1$  為整數

故  $a+1$  是偶數

3. (1) 偶數

(2) 奇數

(3) 偶數

(4) 偶數

4. (1) 偶數

(2) 奇數

(3) 偶數

(4) 奇數

5. (1) 奇數

(2) 偶數

(3) 偶數

(4) 奇數

#### 牛刀小試 14

1. (1)  $>$ ,  $>$

(2)  $<$ ,  $<$

2. (1)  $<$ ,  $>$

(2)  $>$ ,  $<$

3.  $<$ ,  $<$ ,  $(a+b)(a-b)$ ,  $>$

4. (1)  $>$ ,  $>$

(2)  $<$ ,  $<$

5. (1)  $>$ ,  $<$

(2)  $<$ ,  $>$

6.  $<$ ,  $<$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $>$

#### 牛刀小試 15

1.  $a^2 = b^2 - 3^2 = (b-3)(b+3)$

$\therefore a, b$  是正整數

$\therefore a^2$  是  $(b+3)$  的倍式

2.  $a^2 + 5^2 = b^2$

$$a^2 = b^2 - 5^2$$

$$= (b+5)(b-5)$$

$\therefore a, b$  是正整數

$\therefore a^2$  是  $(b+5)$  的倍數

3. C

4. C