



B5 3-1 推理證明



概念

① 認識證明 1



☆已知： \overline{AD} 和 \overline{BC} 相交於 O 點，

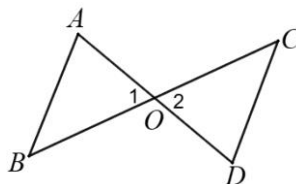
形成兩個 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$

若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，請問：

(1) $\angle 2 =$ _____ 度。

(2) $\angle A + \angle B =$ _____ 度。

(3) $\angle C + \angle D =$ _____ 度。



☆筆記

根據下面的敘述，寫出

已知和求證

等腰 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

則 $\angle B = \angle C$

已知：

求證：

☆不管 $\angle 1$ 是幾度， $\angle A + \angle B$ 都會等於 $\angle C + \angle D$ 嗎？為什麼？

已知：_____

求證：_____

證明：



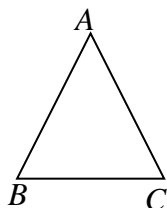
牛刀小試 1

請根據下列敘述，練習找出已知條件和求證項目。

1. $\triangle ABC$ 中，**若** $\angle B = \angle C$ ，**則** $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

(1) 已知：_____

(2) 求證：_____

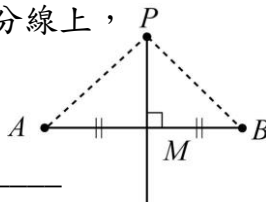


2. **若** P 點在 \overline{AB} 的垂直平分線上，

則 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

(1) 已知：_____

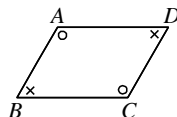
(2) 求證：_____



3. **若** $ABCD$ 為平行四邊形，**則** 對角相等。

(1) 已知：_____

(2) 求證：_____

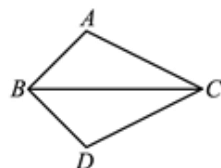


4. **若** $\overline{AB} = \overline{BD}$ ， $\angle ABC = \angle DBC$

則 $\overline{AC} = \overline{CD}$ 。

(1) 已知：_____

(2) 求證：_____

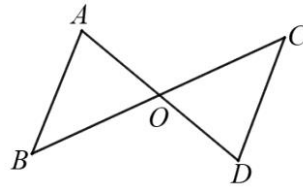




已知： \overline{AD} 和 \overline{BC} 相交於 O 點，形成兩個 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$

求證： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

證明：



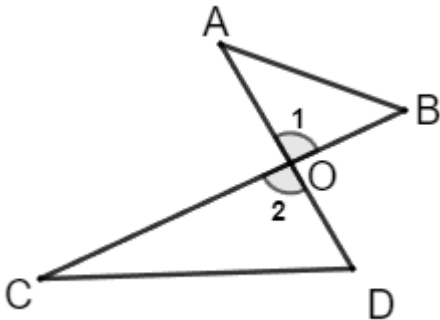
☆筆記

證明就是_____



牛刀小試 2

1. 如圖， \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 O 點，已知 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 23^\circ$ ， $\angle D = 59^\circ$ ，則 $\angle B = ?$



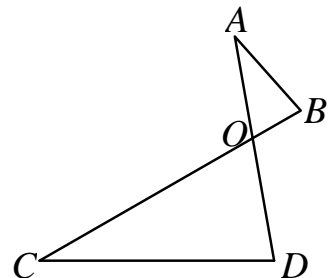
$\therefore \angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ (對頂角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle \underline{\hspace{2cm}} + \angle \underline{\hspace{2cm}}$

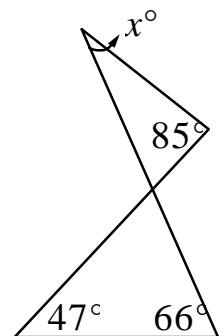
$\underline{\hspace{2cm}}^\circ + \angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ + \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

$\angle B =$

2. 如圖， \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於 O 點，已知 $\angle A = 32^\circ$ ， $\angle B = 78^\circ$ ， $\angle D = 80^\circ$ ，則 $\angle C = ?$



3. 如圖，求 $x = ?$





如圖： $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， D 是 \overline{BC} 的中點

證明： \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的角平分線

思考過程

1. 證明： \overline{AD} 是 $\angle BAC$ 的角平分線

\Rightarrow _____

2. 已知：

① $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle

\Rightarrow _____

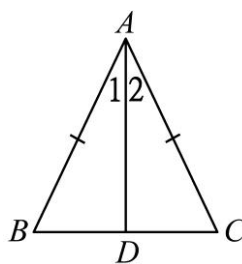
② D 是 \overline{BC} 的中點

\Rightarrow _____

③ 隱藏條件

\Rightarrow _____

3. 利用 _____ 來證明



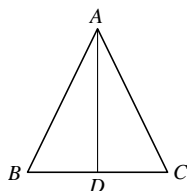
☆筆記
證明要寫什麼？



牛刀小試 3

1. 如圖： $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， D 為 \overline{BC} 的中點。

求證： $\angle B = \angle C$



思考過程

(1) 已知：

① $\triangle ABC$ 為等腰 $\triangle \Rightarrow$ _____

② D 是 \overline{BC} 的中點 \Rightarrow _____

③ 隱藏條件 \Rightarrow _____

(2) 利用 _____ 來證明

證明過程

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，

\therefore ① $\overline{AB} =$ _____ (等腰 \triangle)

② $\overline{BD} =$ _____ (D 為中點)

③ $\overline{AD} =$ _____ (共用邊)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$ (_____ 全等性質)

因此 $\angle B = \angle$ _____ (對應角相等)。

2. 已知 P 點是 $\angle ABC$ 的角平分線上任一點。

證明： $\overline{PD} = \overline{PE}$

思考過程

(1) 證明： \Rightarrow _____

(2) 已知：

① P 是 $\angle ABC$ 的角平分線 \Rightarrow _____

② 「垂直」 \Rightarrow _____

③ 隱藏條件 \Rightarrow _____

(3) 利用 _____ 來證明。

證明過程

$\triangle DBP$ 和 $\triangle EBP$ 中

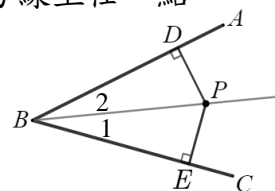
\therefore ① $\angle 1 = \angle$ _____ (角平分線)

② $\angle BDP = \angle BEP =$ _____ 度
(公用邊)

③ $\overline{BP} =$ _____ (共用邊)

$\therefore \triangle DBP \cong \triangle EBP$ (_____ 全等性質)

因此 $\overline{PD} =$ _____ (對應邊相等)。

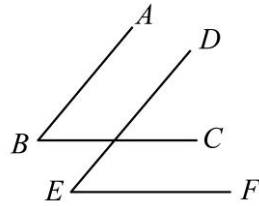




例題 ① 利用平行線性質證明 1——同位角



已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ 求證： $\angle B = \angle E$



☆筆記

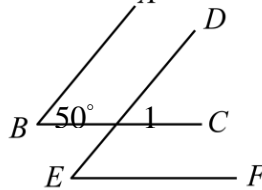
☆



牛刀小試 4

1. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 50^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度？



(1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore$ _____ 角相等

$\angle 1 = \angle$ _____ = _____ 度。



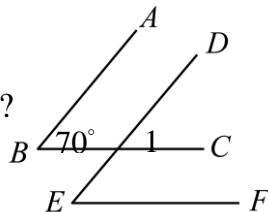
(2) $\because \overline{BC} \parallel \overline{EF} \therefore$ _____ 角相等

$\angle E = \angle$ _____ = _____ 度。



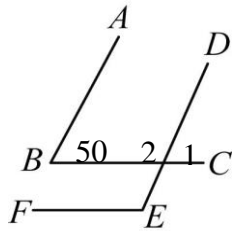
2. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 70^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度？



3. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 50^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度



(1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore$ _____ 角相等



$\angle 1 = \angle$ _____ = _____ 度。

(2) $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (平角)

$\therefore \angle 2 =$ _____ 度。

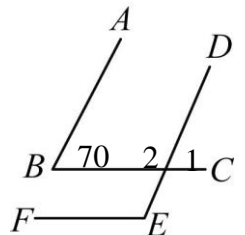


(3) $\because \overline{BC} \parallel \overline{EF} \therefore$ _____ 角相等

$\angle E = \angle$ _____ = _____ 度。

4. $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若 $\angle B = 70^\circ$ ，則 $\angle E$ 幾度



**例題****②****利用平行線性質證明 2——平行四邊形**

請證明平行四邊形對角相等

已知：_____

求證：_____

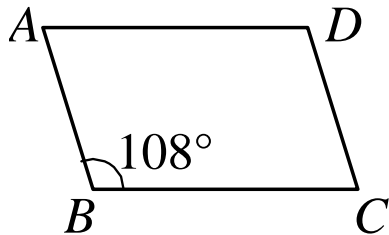
證明：



☆筆記

**牛刀小試 5**

1. 如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle B = 108^\circ$ ，求其他三個內角的度數。



(1) \because 平行四邊形_____角相等

$$\therefore \angle D = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

(2) \because 平行四邊形_____角互補

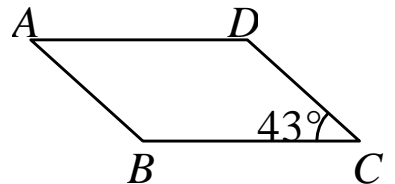
$$\angle A + \angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ - 108^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

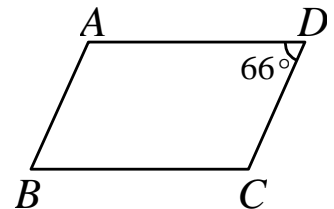
(3) \because 平行四邊形_____角相等

$$\angle C = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

2. 如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle C = 43^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

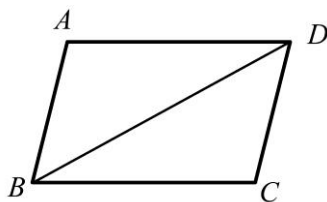


3. 如圖， $\square ABCD$ 中， $\angle D = 66^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

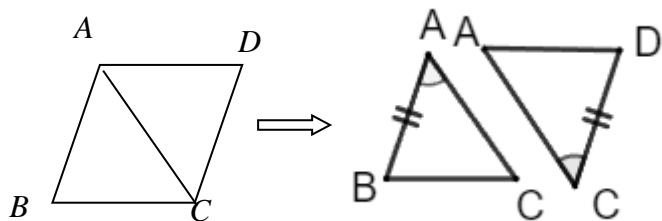


**例題****③****利用三角形的全等性質證明 1——平行四邊形**已知：四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形求證： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

證明：



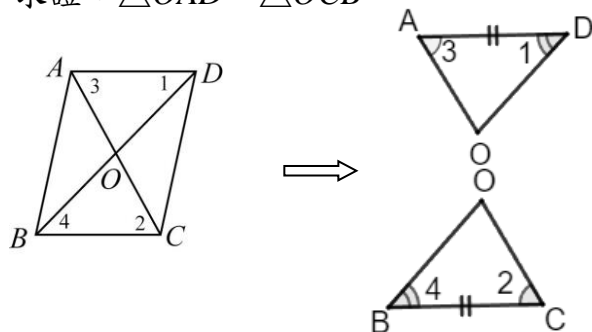
☆筆記

**牛刀小試 6**1. 如右圖，已知 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CDB$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\angle BAC = \angle ACD$ 。試證 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ 

證明：

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中 \therefore ① $\overline{AB} =$ _____ (已知)② $\angle BAC =$ _____ (已知)③ $\overline{AC} =$ _____ (公用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (_____ 全等性質)

2. 證明平行四邊形兩對角線互相平分。

已知： $ABCD$ 為平行四邊形。求證： $\triangle OAD \cong \triangle OCB$ 

證明：

在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OCB$ 中， $\therefore ABCD$ 為平行四邊形 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ① $\angle 1 = \angle 4$ (_____ 角相等)② $\angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角相等)③ $\overline{AD} =$ _____ (對邊相等) $\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCB$ (_____ 全等性質)

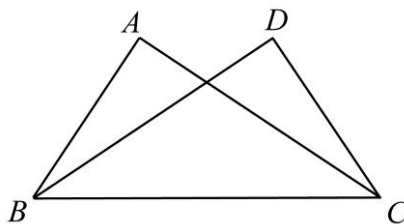


例題 4 利用三角形的全等性質證明 2——重疊圖形



如圖，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中
已知： $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$
求證： $\angle A = \angle D$

證明：



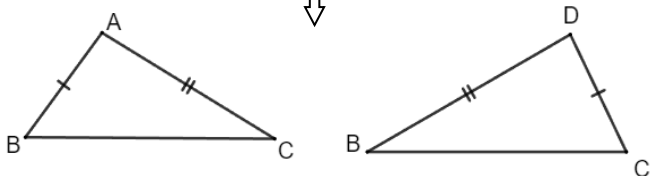
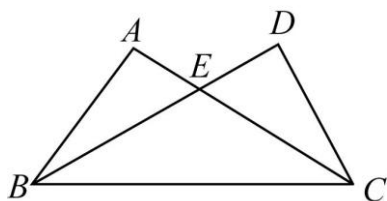
☆筆記



牛刀小試 7

1. $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，

求證： $\angle ACB = \angle DBC$



證明：

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

② $\overline{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

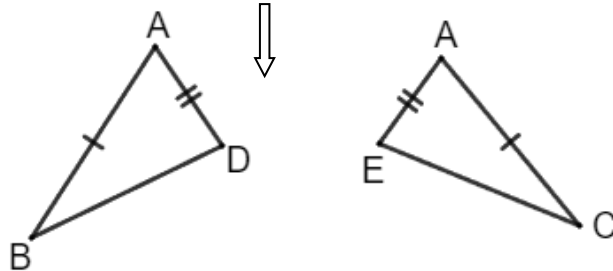
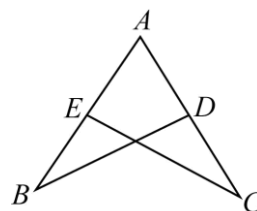
③ $\overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ (共用邊)

$\triangle ABC \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$ (____全等)

故 $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應角相等)

2. 已知： $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$



證明：

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

② $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ (已知)

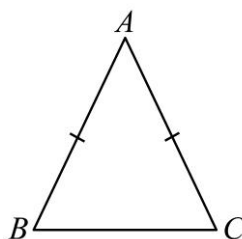
③ $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$ (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$ (____全等)

故 $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)

**例題****5****利用三角形的全等性質證明 3——輔助線**已知： $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle 求證： $\angle B = \angle C$

證明：

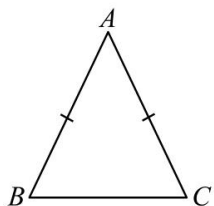
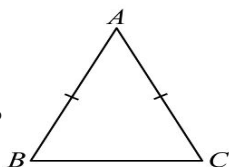
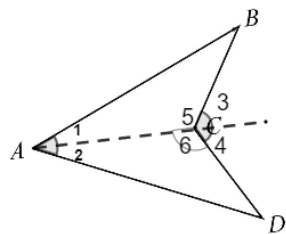
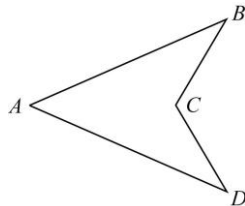


☆筆記

**牛刀小試 8**1. $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， $\angle A = 40^\circ$ ，求 $\angle B = ?$ $\because \triangle ABC$ 為等腰 \triangle $\therefore \angle B = \angle \underline{\hspace{2cm}}$

$$= \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{180 - (\quad)}{2}$$

=

2. $\triangle ABC$ 為等腰 \triangle ， $\angle B = 50^\circ$ ，求 $\angle A = ?$ (1) $\because \triangle ABC$ 為等腰 \triangle $\therefore \angle C = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ (2) $\angle A =$ 3. 如圖，試證 $\angle BCD = \angle A + \angle B + \angle D$ 證明：(1) 連結 \overline{AC} 並延伸 \overline{AC} ，作 \overrightarrow{AC} (2) $\triangle ABC$ 中 $\because \angle \underline{\hspace{2cm}}$ 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\therefore \angle \underline{\hspace{2cm}} = \angle 1 + \angle B$ (3) $\triangle ADC$ 中 $\because \angle \underline{\hspace{2cm}}$ 是 $\triangle ADC$ 的外角 $\therefore \angle \underline{\hspace{2cm}} = \angle 2 + \angle D$

由 (2) + (3)

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \boxed{\angle \underline{\hspace{2cm}}} + \boxed{\angle \underline{\hspace{2cm}}} \\ &= \boxed{\angle \underline{\hspace{2cm}} + \angle B} + \boxed{\angle \underline{\hspace{2cm}} + \angle D} \\ &= \boxed{\angle \underline{\hspace{2cm}} + \angle \underline{\hspace{2cm}}} + \angle B + \angle D \\ &= \boxed{\angle A} + \angle B + \angle D \end{aligned}$$

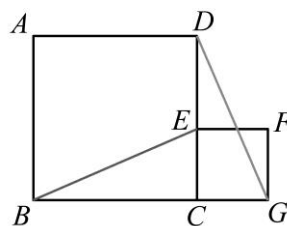
**例題****⑥****利用三角形的全等性質證明 4——正方形**

已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $CEFG$ 都是正方形，

而且 E 在 \overline{CD} 上

求證： $\overline{BE} = \overline{DG}$

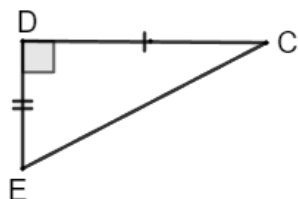
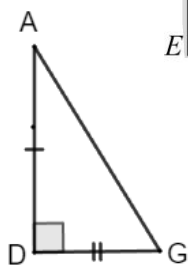
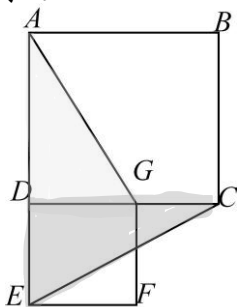
證明：



☆筆記

**牛刀小試 9**

1. 已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $DEFG$ 都是正方形。求證 $\overline{AG} = \overline{CE}$ 。



證明：

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDE$ 中

① $\overline{DG} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($DEFG$ 是正方形)

② $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($ABCD$ 是正方形)

③ $\angle ADG = \angle CDE = \underline{\hspace{2cm}}$ 度

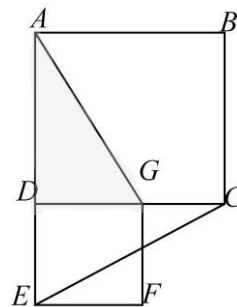
$\triangle ADG \cong \triangle CDE$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 全等)

故 $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)

2. 已知：四邊形 $ABCD$ 和四邊形 $DEFG$ 都是正方形。若 $\overline{DG} = 5$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

(1) $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\overline{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$



$$(1) \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2}$$

$$= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$



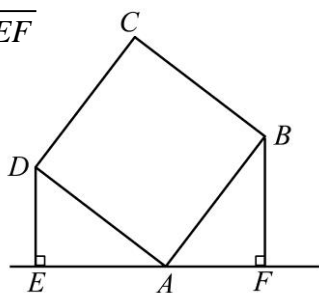
例題 7 利用三角形的全等性質證明 5——直角三角形



已知： $ABCD$ 是正方形，而且 $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{EF}$

求證： $\overline{DE} = \overline{AF}$

證明：



☆筆記

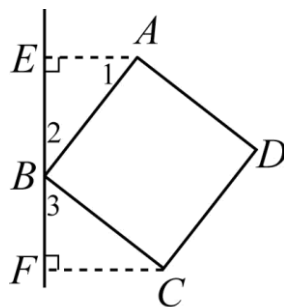


牛刀小試 10

1. 四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

$\overline{BF} \perp \overline{CF}$

(1) 試證： $\overline{AE} = \overline{BF}$



證明：

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BFC$ 中

① $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($ABCD$ 是正方形)

② $\angle AEB = \angle BFC = \underline{\hspace{2cm}}$
($\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{CF}$)

③ $\because \angle 1 + \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 度

$\angle 2 + \angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 度

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$

推得 $\angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$

$\triangle ADG \cong \triangle CDE$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 全等)

故 $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ (對應邊相等)

2. 四邊形 $ABCD$ 為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

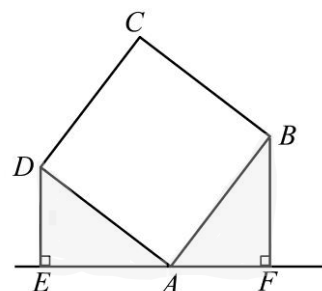
$\overline{BF} \perp \overline{CF}$ ，若 $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{BF} = 4$ ，

求

(1) $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(2) $\overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(3) $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



$\because \triangle DEA \cong \triangle AFB$ ($\underline{\hspace{2cm}}$ 全等)

$\therefore \overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{BF}^2}$

$= \sqrt{(\underline{\hspace{2cm}})^2 + (\underline{\hspace{2cm}})^2}$

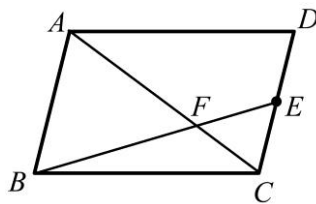


例題 8 利用相似性質來證明



已知：如圖，在 $\square ABCD$ 中， E 為 \overline{CD} 中點， \overline{BE} 和 \overline{AC} 交於 F

求證： $\overline{AF} = 2\overline{CF}$



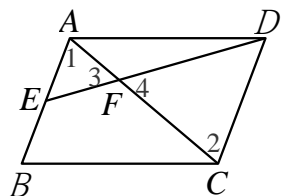
☆筆記

☆



牛刀小試 11

1. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 E 為 \overline{AD} 的中點， \overline{AC} 與 \overline{BE} 交於 F 點，
求證：(1) $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ 。



證明：

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CDF$ 中

(1) $\angle 1 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

(2) $\angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

$\triangle AEF \sim \triangle CDF$ (_____ 相似)

2. 呈上題，若 $\overline{AF} = 6$ ，則 $\overline{CF} = ?$

(1) $\because \triangle AEF \sim \triangle CDF$ 且 E 為 \overline{AD} 的中點

$\therefore \overline{AE} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{AB} =$ _____ : _____

表示 $\triangle CDF$ 是 $\triangle AEF$ 的 _____ 倍放大圖

(2) $\overline{AF} : \overline{CF} = \overline{AE} : \overline{AB} =$ _____ : _____

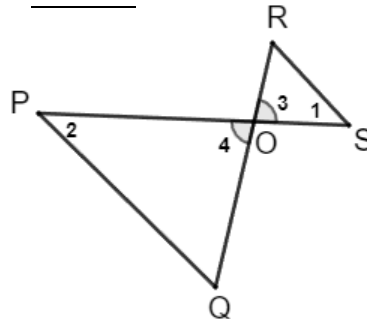
() : $\overline{CF} =$ _____ : _____

$\overline{CF} =$ _____

3. 如圖， \overline{PS} 與 \overline{QR} 交於 O 點，

已知 $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ，且 $\overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$ ，

$\overline{PQ} = 12$ ，則 $\overline{RS} =$ _____。



(1) $\because \overline{RS} \parallel \overline{PQ}$

① $\angle 1 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

② $\angle 3 = \angle$ _____ (_____ 角相等)

$\therefore \triangle SRO \sim \triangle PQO$ (_____ 相似)

(2) 因為 $\overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$ ，

所以 $\triangle PQO$ 是 $\triangle SRO$ 的 _____ 倍放大圖

$\overline{PQ} : \overline{RS} = \overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$

() : $\overline{RS} = 3 : 1$

$\overline{RS} =$ _____



舉例：

1. 偶數：_____

☆換個寫法：_____

問題：有沒有辦法可以寫出世界上**所有的偶數**？

2. 奇數：_____

☆換個寫法：_____

問題：有沒有辦法可以寫出世界上**所有的奇數**？

☆筆記

① 0 是奇數還是偶數？

② 3 的倍數如何表示？



牛刀小試 12

1. (1)請寫出 4 個偶數：_____。

(2) 請寫出 4 個奇數：_____。

(3) 請寫出 4 個整數：_____。

注意：整數包含奇數和偶數2. 若 a 是**奇數**，則下列各題是奇數或偶數(1) $2a$ 為_____數**代數字判斷** $2a = 2 \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $2a+1$ 為_____數**代數字判斷** $2a + 1 = 2 \times (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $2(a+3)$ 為_____數**代數字判斷** $2(a+3) = 2 \times [(\quad) + 3] = \underline{\hspace{2cm}}$ 3. 若 b 是**偶數**，則下列各題是奇數或偶數(1) $b+1$ 為_____數**代數字判斷** $b+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $b+2$ 為_____數**代數字判斷** $b+2 = (\quad) + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 4. 若 c 是**整數**，則下列各題是奇數或偶數或都有可能(1) $c+1$ 為_____**奇** $c+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ **偶** $c+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ (2) $2c$ 為_____**奇** $2c = 2 \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$ **偶** $2c = 2 \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}$



例題 9 代數證明 1——奇數和偶數



已知： a 是一個奇數

求證： a^2 也是奇數

證明：

☆筆記



牛刀小試 13

1. 已知： a 是偶數，則 a^2 一定是偶數 嗎？

(1) 若 $a = 2$ ，

$$a^2 = (\quad) \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

a^2 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

(2) 若 $a = 4$ ，

$$a^2 = (\quad) \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

a^2 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

2. 已知： a 是偶數。

求證： a^2 也是偶數。

證明：

$\because a$ 是偶數，假設 $a = 2k$ ，

(其中 k 是 數)

$$\therefore a^2 = (\underline{\hspace{2cm}})^2 = 4k^2$$

$$= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

$$= 2 \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ 數}$$

故 a^2 也是偶數。

3. 已知： a 是奇數，則 $a+1$ 一定是偶數 嗎？

(1) 若 $a = 1$ ，

$$a+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a+1$ 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

(2) 若 $a = 3$ ，

$$a+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a+1$ 是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

2. 若 a 為奇數。

試證： $a+1$ 為偶數。

證明：

$\because a$ 是奇數，假設 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(其中 k 是整數)

$$\therefore a+1 = (\underline{\hspace{2cm}}) + 1 = 2k + 2$$

$$= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

$$= 2 \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ 數}$$

故 $a+1$ 也是偶數。



例題 10 代數證明 2——比大小



已知： a 、 b 是正數，而且 $a > b$

求證： $a^2 > b^2$

證明：

☆筆記

若 a 、 b 是正數， $a^2 > b^2$

則 $a \square b$



牛刀小試 14

1. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $7 \square 3 \Rightarrow 7^2 \square 3^2$

(2) $5 \square 2 \Rightarrow 5^2 \square 2^2$

若 a 、 b 是正數，而且 $a > b$ ，

則 $a^2 \square b^2$

2. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $5^2 \square 4^2$ ，但 $5 \square 4$

(2) $7^2 \square 3^2$ ，但 $7 \square 3$

若 a 、 b 是正數，而且 $a^2 > b^2$

則 $a \square b$

3. 若 a 、 b 為負數，且 $a < b$ 。

那麼 a^2 會小於 b^2 嗎？

在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1) $(-7) \square (-3) \Rightarrow (-7)^2 \square (-3)^2$

(2) $(-5) \square (-2) \Rightarrow (-5)^2 \square (-2)^2$

若 a 、 b 是負數，且 $a < b$

則 $a^2 \square b^2$

4. 已知： a 、 b 為負數，且 $a < b$ 。

求證： $a^2 > b^2$

證明：

$$\because a < b < 0 \quad \therefore a - b \square 0,$$

$$\therefore a、b \text{ 為負數 } \therefore a + b \square 0$$

$$a^2 - b^2 = (\quad)(\quad) \square 0$$

故 $a^2 > b^2$



例題 11 代數證明 3——畢氏定理



已知： a 、 b 、 c 分別為直角 \triangle 的三邊長，而且 c 是斜邊
(其中 a 、 b 、 c 是正整數)

求證： a^2 是 $(b+c)$ 的倍數

證明：

☆筆記
因數和倍數



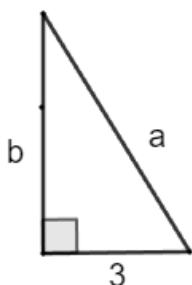
牛刀小試 15

1. 在直角 \triangle 中， a 為斜邊長， b 、3 為兩股長。

其中 a 、 b 為正整數，

請問：下列哪一個數是 $(a+b)$ 的倍數？

(A) 7 (B) 8 (C) 9



(1) $\because a$ 、 b 、3 為直角三角形的三邊長，

且 a 為斜邊長，

$$\therefore b^2 + 3^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = (\underline{\hspace{1cm}})^2$$

$$(\underline{\hspace{1cm}} + b)(\underline{\hspace{1cm}} - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

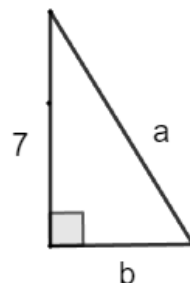
故 $\underline{\hspace{2cm}}$ 是 $(a+b)$ 的倍數。

2. 已知直角 \triangle 中， b 為斜邊長，

a 、7 為兩股長，其中 a 、 b 為正整數，

請問： $(a-b)$ 為下列哪一個數的因數？

(A) 25 (B) 36 (C) 49



(1) $\because a$ 、 b 、7 為直角三角形的三邊長，

且 a 為斜邊長，

$$\therefore b^2 + 7^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = (\underline{\hspace{1cm}})^2$$

$$(\underline{\hspace{1cm}} + b)(\underline{\hspace{1cm}} - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

故 $(a-b)$ 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的因數。



解 答 篇

牛刀小試 1

1. 已知: $\angle B = \angle C$

求證: $\overline{AB} = \overline{AC}$

2. 已知: P 在 \overline{AB} 的中垂線上

求證: $\overline{PA} = \overline{PB}$

3. 已知: $ABCD$ 為平行四邊形

求證: 對角相等

4. 已知: $\overline{AB} = \overline{BD}$, $\angle ABC = \angle DBC$

求證: $\overline{AC} = \overline{CD}$

牛刀小試 2

1. $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (對頂角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

$\underline{45^\circ} + \angle B = \underline{23^\circ} + \underline{59^\circ}$

$\angle B = 37^\circ$

2. 30°

3. 28°

牛刀小試 3

1. (1) ① $\overline{AB} = \overline{AC}$

② $\overline{BD} = \overline{CD}$

③ $\overline{AD} = \overline{AD}$

(2) SSS 全等性質

證明過程

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{BD} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{AD}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

(SSS 全等性質)

因此 $\angle B = \angle C$

2. (1) $\overline{PD} = \overline{PE}$

(2) ① $\angle 1 = \angle 2$

② $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$

③ $\overline{BP} = \overline{BP}$ (共用邊)

(3) AAS 全等性質

證明過程

$\triangle DBP$ 和 $\triangle EBP$ 中

(1) $\angle 1 = \angle 2$ (角平分線)

(2) $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$

(3) $\overline{BP} = \overline{BP}$ (共用邊)

$\triangle DBP \cong \triangle EBP$ (AAS 全等)

故 $\overline{PD} = \overline{PE}$

牛刀小試 4

1. (1) 同位, $\angle B$, 50

(2) 同位, $\angle 1$, 50

2. 70 度

3. (1) 同位, $\angle B$, 50

(2) 130

(3) 同位, $\angle 2$, 130

4. 110 度

牛刀小試 5

1. (1) 對角, $\angle B$, 108

(2) 鄰角, 180, 180, 72

(3) 對角, $\angle A$, 72

2. $\angle A = 43^\circ$, $\angle B = 137^\circ$

$\angle D = 137^\circ$

3. $\angle A = 114^\circ$, $\angle B = 66^\circ$

$\angle C = 114^\circ$

牛刀小試 6

1. \overline{DC} , $\angle DCA$, \overline{AC} SAS,

2. 內錯, $\angle 2$, 內錯, \overline{BC} , ASA,

牛刀小試 7

1. $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

① $\overline{AB} = \overline{DC}$

② $\overline{AC} = \overline{BD}$

③ $\overline{BC} = \overline{BC}$

$\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (SSS 全等)

故 $\angle ACB = \angle DBC$

2. $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 中

① $\overline{AB} = \overline{AC}$

② $\overline{AD} = \overline{AE}$

③ $\angle A = \angle A$ (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle AEC$ (SAS 全等)

故 $\overline{BD} = \overline{CE}$

牛刀小試 8

1. $\angle D$, 40, 70 度

2. (1) $\angle B$, 50,

(2) 80 度

3. (1) $\angle 3$, $\angle 3$

(2) $\angle 4$, $\angle 4$

(3) $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 1$, $\angle 2$

牛刀小試 9

1. 在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle CDE$

\therefore ① $\overline{DG} = \overline{DE}$

② $\overline{AD} = \overline{DC}$

③ $\angle ADG = \angle CDE = 90^\circ$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE$ (SAS 全等)

故 $\overline{AG} = \overline{CE}$

2. (1) 13 (2) 13

牛刀小試 10

1. (1) 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle BFC$

\therefore ① $\overline{AB} = \overline{BC}$

② $\angle AEB = \angle BFC$

③ $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle BFC$ (AAS 全等)

故 $\overline{AE} = \overline{BF}$

2. (1) 4

(2) 3

(3) 5

牛刀小試 11

1. (1) $\angle 2$, 內錯

(2) $\angle 4$, 對頂

2. (1) 1:2, 2

(2) 6, 1:2, 12

3. (1) ① $\angle 2$, 內錯

② $\angle 4$, 對頂, AA

(2) 12, 4

牛刀小試 12

1. (1) 2, 4, 6, 8, 10, ...

(2) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

2. (1) 偶, 1, 2

(2) 奇, 1, 3

(3) 偶, 1, 8

3. (1) 奇, 2, 3

(2) 偶, 2, 4

4. (1) 都有可能

1, 2,

2, 3

(2) 偶

1, 2

2, 4

牛刀小試 13

1. (1) $2 \times 2 = 4$, 偶

(2) $4 \times 4 = 16$, 偶

2. $\because a$ 是偶數

設 $a = 2k$ (k 為整數)

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$= 2 \times (2k^2)$$

$$= 2 \times \text{整數}$$

$\therefore a^2$ 也是偶數

3. (1) 1, 2, 偶

(2) 3, 4, 偶

4. $\because a$ 是奇數, 設 $a = 2k + 1$

(k 為整數)

$$a + 1 = (2k + 1) + 1$$

$$= 2k + 2$$

$$= 2 \times (k + 1)$$

$$= 2 \times \text{整數}$$

故 $a + 1$ 是偶數

牛刀小試 14

1. (1) $>$, $>$

(2) $>$, $>$

$>$

2. (1) $>$, $>$

(2) $>$, $>$

$>$

3. (1) $<$, $>$, $>$

(2) $<$, $>$

(4) $<$, $<$

$\underline{(a+b)(a-b)}$, $>$

牛刀小試 15

1. C

(1) a^2

(2) 3^2 , a , a , 9 , 9

2. C

(1) a^2

(2) 7^2 , a , a , 49 , 49